

بازه اطمینان بیشینه چگالی بوت استرپی با کاربرد در داده‌های آب و هواشناسی

مهدی پژمان^۱، علی شادروخ^۲، عادل محمدپور^۳

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۲/۰۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۸/۰۸

چکیده:

بوت استرپ یک روش بازنمونه‌گیری بر پایه کامپیوتر و روش‌های استنباط آماری است که می‌تواند برآوردی برای خطای برآوردگرها فراهم کند. در این مقاله علاوه بر اینکه بازه اطمینان بوت استرپی برای چندک‌ها با روش‌های بوت استرپ صدکی، بوت استرپ اریب تصحیح‌شده شتابیده و t -بوت استرپ محاسبه می‌شود، همچنین بازه اطمینان به روش بیشینه چگالی بوت استرپی برای توزیع‌های احتمال مورد استفاده در داده‌های آب و هواشناسی مطرح می‌شود و میانگین طول بازه اطمینان را به‌عنوان ملاکی برای ارزیابی روش‌ها به دست می‌آوریم. برای محاسبه میانگین طول بازه اطمینان‌ها با روش‌های متفاوت، ابتدا بهترین توزیع از بین توزیع‌های پرکاربرد به داده‌های اصلی برازش داده می‌شود و پارامترهای توزیع برازش داده‌شده را به روش ماکسیمم درست‌نمایی برآورد و از روی آن چندک‌ها را به دست می‌آوریم. سپس با تکرار نمونه‌های بوت استرپی شبیه‌سازی‌شده تا رسیدن احتمال پوشش چندک واقعی به سطح اطمینان اسمی ۰/۹۵ ادامه می‌دهیم. نتایج شبیه‌سازی انجام‌شده نشان می‌دهد که روش بیشینه چگالی بوت استرپی کمترین میانگین طول بازه اطمینان را در بین همه روش‌ها را دارد.

واژه‌های کلیدی: روش بازنمونه‌گیری بوت استرپ، چندک، احتمال پوشش، مقادیر بیشینه

رابطه زیر را داریم:

۱ مقدمه

$$P(X \geq X_T) = \frac{1}{T} \Rightarrow X_T = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right)$$

در علوم هیدرولوژی، به دست آوردن بزرگی یک رویداد متناظر با یک دوره بازگشت کافی نیست؛ چون یک سطح عدم قطعیت در برآورد پارامتر و چندک از یک نمونه متناهی وجود دارد که باید در تصمیم‌گیری آن را در نظر گرفت. یک راه‌حل برای این مسئله به دست آوردن بازه‌ای است که با سطح اطمینان بالا مقدار واقعی کمیت مورد نظر (در اینجا چندک) را شامل شود.

معمولاً بازه اطمینان برای کمیت موردعلاقه با برآوردگر $\hat{\theta}$ به همراه برآوردگر خطای استاندارد (S) آن برآوردگر به دست می‌آید. مثلاً یک بازه اطمینان ۹۵٪ به صورت $\hat{\theta} \pm 1.96 S$ به دست می‌آید (با فرض اینکه توزیع برآوردگر $\hat{\theta}$ تقریباً نرمال است) [۳]. حالت‌های متعددی وجود دارد که در آن فرض نرمال بودن توزیع برآوردگر کمیت موردعلاقه برقرار نیست و یا اینکه که برآورد کردن خطای استاندارد برآوردگر دشوار است. یک روش برای حل این مسئله به دست آوردن بازه اطمینان‌های ناپارامتری است که یک روش مهم از این دسته

تحلیل فراوانی داده‌های هیدرولوژی مستلزم تعیین بزرگی متغیرهای هیدرولوژی متناظر با یک دوره بازگشت است. دوره بازگشت به‌صورت میانگین بازه زمانی (روی یک دوره طولانی از زمان طی شده) که بزرگی یک متغیر هیدرولوژی به دست آید یا از آن فراتر رود، تعریف می‌شود [۹، ۱]. مطالعه و طراحی سازه‌های هیدرولیکی، مستلزم برآورد رویدادهای هیدرولوژی (مثل سیل، بارش و...) به‌وسیله استنباط آماری از یک توزیع احتمال است. به‌عنوان مثال چندک تعیین‌شده برای یک توزیع احتمال، به‌صورت بزرگی یک متغیر هیدرولوژی (مثل جریان یک رودخانه یا میزان بارش) متناظر با یک دوره بازگشت تعریف می‌شود. به‌طورمعمول تعیین چندک‌ها بر اساس مشاهدات هیدرولوژیکی چندساله و تحلیل آماری مقادیر حداکثر یک رویداد، صورت می‌پذیرد. اگر X_T نشانگر چندک یک متغیر مرتبط با داده‌های آب و هواشناسی با تابع توزیع F برای یک دوره بازگشتی T باشد آنگاه

^۱ گروه آمار، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران.

^۲ هیئت‌علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران. (نویسنده مسئول: a.shadrokh@pnu.ac.ir)

^۳ هیئت‌علمی گروه آمار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران.

از تحقیق‌های انجام‌شده قبلی، داویسون و هینکلی [۲] انواع بازه‌های اطمینان بوت استرپ و دقت آن‌ها را ارزیابی کردند. افرون و تیشیرانی [۷] انواع روش‌های باز نمونه‌گیری و آزمون فرض با بوت استرپ را بررسی کرده‌اند. هاینمن [۱۳] و کراسچکی [۱۵] روشی برای محاسبه کوتاه‌ترین بازه اطمینان با بیشینه چگالی ارائه کرده‌اند. ژو و کلسا [۲۰] احتمال پوشش و میانگین طول بازه اطمینان را به روش‌های مختلف بوت استرپ برای میانگین و میانه توزیع‌های پیوسته متقارن مانند نرمال، یکنواخت، کوشی و لاپلاس به دست آورده‌اند. فلاور و همکاران [۹] احتمال پوشش برای چندک‌ها با دوره‌های بازگشتی متفاوت را با چهار روش بوت استرپ BP ، BC ، BCA و MSB و شش توزیع مرسوم در هیدرولوژی را بررسی کرده‌اند. جانگ، گوپتا و چو [۱۴] نیز در خصوص برآورد بازه‌ای به سه روش بوت استرپ BP ، BCA و t برای ضرایب مسیر در مدل معادلات ساختاری و احتمال پوشش مقدار واقعی جامعه بحث کرده‌اند.

در این مطالعه، ابتدا از بین ۱۵ توزیع پرکاربرد در علوم هیدرولوژی بر اساس تجربه‌های گذشته محققین [۸، ۹، ۱۰، ۱۷]، برای داده‌های حداکثر بارش ۲۴ ساعته ثبت‌شده سالانه در ۵ ایستگاه هواشناسی استان گیلان در طی ۲۰ سال، بهترین توزیع برازش شده با ملاک BIC^v انتخاب می‌شود و سپس احتمال پوشش بازه‌های اطمینان و نیز میانگین طول بازه اطمینان‌های به‌دست‌آمده با روش HDI بوت استرپی را محاسبه و آن را با سه روش دیگر مقایسه می‌کنیم. برای محاسبه احتمال پوشش بازه‌های اطمینان بر اساس چندک‌ها نیاز به محاسبه چندک داده‌های اولیه و چندک‌های داده‌های شبیه‌سازی شده است. چون چندک توزیع‌های فوق شامل چند پارامتر هستند، ابتدا پارامترهای توزیع‌های برازش داده‌شده به داده‌های اصلی را به روش حداکثر درستنمایی برآورد کرده و آن‌ها را به جای پارامترها در توزیع قرار داده و سپس از روی آن چندک‌ها را به دست می‌آوریم. در ادامه با مرتب کردن چندک‌ها حدود اطمینان را برآورد می‌کنیم.

در مطالعات قبلی نظیر [۹، ۱۴، ۲۰]، احتمال پوشش با تعداد نمونه اولیه و تعداد تکرار بوت استرپ ثابت (مثلاً ۱۰۰۰) به دست آمده‌اند که در نهایت نزدیک‌ترین احتمال پوشش به مقدار اسمی ۰.۹۵ را به عنوان حالت مطلوب انتخاب می‌کردند، درحالی‌که ما در اینجا برای اجتناب از

روش‌ها روش باز نمونه‌گیری بوت استرپ است [۵]. در باز نمونه‌گیری پیشنهادشده توسط افرون [۴] توزیع آماره مفروض (میانگین، چندک و...) بر اساس داده‌های در دسترس به دست می‌آید. برای این هدف نمونه‌های زیادی از نمونه اصلی با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو تولید می‌شود. دو روش اساسی برای باز نمونه‌گیری بوت استرپ وجود دارد: پارامتری و ناپارامتری. در بوت استرپ پارامتری نمونه‌های تصادفی از توزیع برازش شده به داده‌ها تولید می‌شوند. در بوت استرپ ناپارامتری نمونه‌های بوت استرپ با باز نمونه‌گیری با جایگذاری از نمونه اصلی ساخته می‌شوند. بوت استرپ پارامتری مشابه شبیه‌سازی مونت کارلو است. با این تفاوت که پارامترهای استفاده‌شده در بوت استرپ پارامتری از نمونه اصلی برآورد می‌شوند، درحالی‌که پارامترها در شبیه‌سازی مونت کارلو بر اساس هدف شبیه‌سازی قرار داده می‌شوند. هرچند در اجرا این دو روش یکسان‌اند [۹].

روش‌های متعددی برای ساخت بازه‌های اطمینان از نمونه‌های بوت استرپ معرفی شده است؛ از میان آن‌ها می‌توان بوت استرپ صدکی^۴ (BP)، بوت استرپ اریب تصحیح‌شده شتابیده^۵ (BCA)، t -بوت استرپ و روش دیگری که در این مقاله به کار گرفته شده به نام بازه اطمینان بیشینه چگالی^۶ (HDI) بوت استرپی را نام برد. هرکدام از این روش‌ها مزایا و معایبی دارند. لکن، واضح نیست که کدام روش جهت ساخت بازه‌های اطمینان برای چندک‌های متغیرهای هیدرولوژیکی مناسب‌تر است. یک معیار برای تحقیق اینکه کدام روش برای ساخت بازه‌های اطمینان مؤثرتر است، محاسبه احتمال پوشش هرکدام از بازه‌های اطمینان ساخته‌شده است. احتمال پوشش به صورت درصد دفعاتی که در آن بازه‌های اطمینان ساخته‌شده مقدار واقعی کمیت موردعلاقه (در اینجا چندک) را در بر دارند تعریف می‌شود. این احتمال پوشش باید با سطح اطمینان بازه ساخته‌شده منطبق باشد؛ یعنی برای یک سطح اطمینان ۹۵٪ انتظار می‌رود که ۹۵٪ بازه‌های اطمینان ساخته‌شده، مقدار واقعی کمیت موردعلاقه را شامل شود [۱۹].

محک دیگر برای بررسی دقت بازه اطمینان‌ها می‌تواند کوتاه‌تر بودن بازه اطمینان به دست‌آمده با این روش‌ها باشد. محک سوم کمتر بودن تعداد بازه اطمینان‌های ساخته‌شده برای رسیدن به احتمال پوشش موردنظر است؛ یعنی روشی که با کمترین تعداد بازه اطمینان ساخته‌شده به احتمال پوشش موردنظر برسد، بهتر عمل کرده است.

^۴ Bootstrap Percentile
^۵ Bootstrap Bias-Corrected Accelerated
^۶ Interval Density Highest
^۷ Criterion Information Bayesian

۲ مواد و روش‌ها

۱.۲ اطلاعات داده‌های آب و هواشناسی

داده‌های استفاده‌شده در اینجا رکوردهای سالانه حداکثر بارش ۲۴ ساعته در ۵ ایستگاه هواشناسی استان گیلان در طی ۲۰ سال، از سال ۱۳۷۸ تا ۱۳۹۹ می‌باشد که از سامانه سالنامه آماری (<https://www.amar.org.ir/salnameh-amari>) و آمارنامه استان گیلان به دست آمده است. خلاصه داده‌ها در جدول ۱ آمده است:

جدول ۱: آماره‌های توصیفی ۵ ایستگاه هواشناسی استان گیلان

ایستگاه	میانگین	انحراف معیار	ضریب چولگی
انزلی	۱۲۲/۹۳	۳۶/۶۴	۰/۷۸
آستارا	۱۱۵/۱۸	۵۱/۰۷	۱/۹۸
رشت	۸۷/۱۹	۲۵/۲۶	۰/۵۷
لاهیجان	۱۰۵/۸۲	۴۳/۶۴	۲/۶۹
منجیل	۲۳/۸۶	۶/۷۲	۰/۴۲

تعداد تکرارهای بوت‌استرپ زیاد، با در نظر گرفتن اندازه‌های متفاوت نمونه بوت‌استرپی $n = ۲۰, ۴۰, ۶۰, \dots$ ، تعداد تکرارهای نمونه‌های بوت‌استرپ را صرفاً تا رسیدن به احتمال پوشش ۰.۸۵ ادامه می‌دهیم. ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش دوم مواد و روش‌ها شامل اطلاعات مربوط به داده‌های واقعی، روش‌های بازه اطمینان بوت‌استرپ و الگوریتم کار توضیح داده می‌شود. در بخش سوم یافته‌های تحقیق شامل تحلیل فراوانی داده‌ها، مقایسه روش‌های بوت‌استرپ و بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲.۲ روش‌های بازه اطمینان بوت‌استرپ

روش‌های متعددی برای ساخت بازه‌های اطمینان از نمونه‌های بوت‌استرپ معرفی شده است. از میان آن‌ها ما بوت‌استرپ صدکی (BP) ، بوت‌استرپ اریب تصحیح شده شتابیده (BCA) ، t -بوت‌استرپ و روش دیگری به نام بازه اطمینان بیشینه چگالی (HDI) بوت‌استرپی را استفاده خواهیم کرد.

۱.۲.۲ روش بوت‌استرپ صدکی (BP)

در این روش برای ساخت بازه اطمینان بر اساس چندک x_T ، ابتدا B نمونه تصادفی از نمونه اصلی تولید و برای هر نمونه چندک موردنظر را محاسبه می‌کنیم. سپس چندک‌های همه نمونه‌ها از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب می‌شوند و بازه اطمینان با ضریب اطمینان $1 - \alpha$ به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$[x_{Tj}^*, x_{Tk}^*] \quad (1)$$

که در آن x_{Tj}^* ، چندک j ام مجموعه چندک‌های مرتب شده، x_{Tk}^* چندک k ام آن مجموعه را نشان می‌دهد، $j = [\frac{\alpha}{2}(B+1)]$ و

$$k = [(1 - \frac{\alpha}{2})(B+1)] \text{ و } \alpha \text{ سطح معنی‌داری است.}$$

۲.۲.۲ بوت‌استرپ اریب تصحیح شده شتابیده (BCA)

افرون [۶] یک اصلاح روش صدکی را معرفی کرد که هم اریبی و هم چولگی را تصحیح می‌کند. این روش محاسبه یک عامل تصحیح اریبی z و محاسبه یک عامل تصحیح چولگی (عامل اصلاح تسریع) a را لازم دارد. عامل z به صورت $z = \Phi^{-1}(\frac{\#\{\hat{x}_T^* < \hat{x}_T\}}{B})$ تعریف می‌شود که \hat{x}_T^* چندک بوت‌استرپ و Φ^{-1} تابع معکوس تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد را نشان می‌دهد. ضریب a می‌تواند با بازنمونه‌گیری جک نایف حاصل شود. فرض کنید $x_{(-i)}$ ، نمونه‌ای با حذف i -امین نقطه از نمونه n تایی اولیه باشد و $x_{T(-i)}$ چندک آن نمونه $n-1$ تایی باشد و میانگین این چندک‌ها $\bar{x}_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{T(-i)}$ است. عامل شتاب a به صورت:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n [x_{T(-i)} - \bar{x}_T]^2}{6 \left\{ \sum_{i=1}^n [x_{T(-i)} - \bar{x}_T]^2 \right\}^{\frac{5}{6}}}$$

تعریف می شود.

t -بوت استرپ با ضریب $1 - \alpha$ به صورت:

$$(x_T - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^* \widehat{SE}^*, x_T - t_{\frac{\alpha}{2}}^* \widehat{SE}^*)$$

است که در آن $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^*$ و $t_{\frac{\alpha}{2}}^*$ چندک های نمونه ای توزیع آماره t -بوت استرپ (t^*) است.

با مقادیر z_0 و a ، مقادیر a_1 و a_2 محاسبه می شوند:

$$a_1 = \Phi \left\{ z_0 + \frac{z_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}}{1 - a(z_0 + z_{\frac{\alpha}{2}})} \right\}$$

$$a_2 = \Phi \left\{ z_0 + \frac{z_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{1 - a(z_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}})} \right\}$$

با مقادیر a_1 و a_2 یک فاصله اطمینان همانند رابطه (۱) ساخته می شود:

$$[x_{Tj}^*, x_{Tk}^*]$$

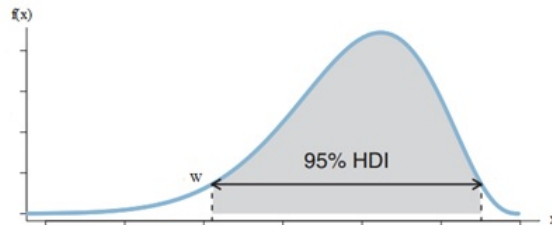
که در آن $j = a_1(B + 1)$ ، $k = a_2(B + 1)$.

۳.۲.۲ فاصله اطمینان t -بوت استرپ

افرون [۵] روش بازه اطمینان t -بوت استرپ را معرفی کرد. این روش بر اساس یک کمیت محوری مانند کمیت محوری آماره t -استودنت به صورت $t^* = \frac{x_T^* - x_T}{\widehat{SE}^*}$ برآورد خطای استاندارد چندک بوت استرپ x_T^* است. با B مرتبه تکرار، B کمیت محوری $t_1^*, t_2^*, \dots, t_B^*$ به دست می آید. در این صورت بازه اطمینان

۴.۲.۲ بازه اطمینان بیشینه چگالی بوت استرپ (HDI)

تعریفی از روش HDI درهائیندمن [۱۳] و کراسچکی [۱۵] آمده است: بازه HDI ، بازه ای است که احتمال مدنظر (مثلاً ۰.۹۵) را به قسمی شامل می شود که همه نقاط درون بازه اطمینان، چگالی بیشتری نسبت به نقاط خارج آن بازه داشته باشند؛ به بیان ریاضی: اگر $f(x)$ تابع چگالی متغیر تصادفی x باشد، بازه HDI شامل همه آن مقادیری از x است که چگالی آن ها حداقل به بزرگی مقدار W است به قسمی که انتگرال روی همه آن مقادیر x برابر ۰.۹۵ است؛ یعنی x ها در HDI ی ۹۵ درصد دارای چگالی احتمال $f(x) \geq W$ هستند که W در شکل ۱ بازه با بیشینه چگالی نشان داده شده است.



شکل ۱: بازه با بیشینه چگالی

BIC انتخاب می کنیم. فهرست این توزیع ها به شرح زیر است: لگ-گاما $\log - gamma (LOGGM)$ ، لگ پیرسون نوع ۳ $\log - Pearson type 3 (LP3)$ ، گامبل $Gumbel (GMB)$ ، مقادیر بیشینه تعمیم یافته $General Extreme Values (GEV)$ ، لگ-لجستیک $\log - logistic (LLOG)$ ، لجستیک تعمیم یافته $generalized logistic (GLOG)$ ، وایبول $Weibull$ ، لگ نرمال $(lnorm)$ ، گاما، نرمال، نمایی، فرچه $(Frechet)$ ، پارتو تعمیم یافته $(genPareto)$ ، پیرسون نوع ۳ $(Pearson Type III)$ ، لگ نرمال سه پارامتری $(lnorm3)$.

در این تحقیق به جای استفاده از داده های متغیر x با تابع چگالی $f(x)$ ، از چندک های به دست آمده از داده های بوت استرپ تولید شده استفاده می شود.

۳.۲ احتمال پوشش و طول بازه اطمینان

برای تعیین احتمال پوشش و طول بازه اطمینان، مشابه فرآیند مورد استفاده در [۹، ۱۲] عمل می کنیم: بهترین توزیع برازش شده به داده های مدنظر در این تحقیق، از بین ۱۵ توزیع مرسوم و پرکاربرد در علوم هیدرولوژی بر اساس ملاک

پارامترهای توزیع را برآورد کرده و با جایگذاری در توزیع مذکور مقدار چندک موردنظر را به دست می‌آوریم. این کار را $R = ۱۰۰۰$ بار تکرار می‌کنیم.

گام ۵: بر اساس چندک‌های به دست آمده در گام قبل با استفاده از چهار روش مورد اشاره بازه اطمینان برای چندک موردنظر به دست می‌آوریم و تعیین می‌کنیم که آیا بازه به دست آمده چندک اولیه را شامل می‌شود یا خیر و طول بازه اطمینان را محاسبه می‌کنیم.

گام ۶: دو گام قبل را B بار تکرار می‌کنیم تا به احتمال پوشش $۰/۹۵$ موردنظر برسیم و میانگین طول بازه اطمینان‌ها را محاسبه می‌کنیم.

قابل ذکر است تعداد n را برای $n = ۲۰, ۴۰, ۶۰, \dots, ۱۶۰$ و $n = ۱۰۰۰$ امتحان می‌کنیم تا ببینیم به ازای چه مقداری برای n و B ، احتمال پوشش $۰/۹۵$ به دست می‌آید.

برای شبیه‌سازی داده‌ها و تکرارهای بوت‌استرپ از نرم‌افزار R استفاده کردیم؛ برای برازش توزیع به داده‌ها از تابع $gofstat$ در پکیج $fitdist$ و برای سه روش بوت‌استرپ BP ، BCA و t -بوت‌استرپ از تابع $boot.ci$ در پکیج $boot$ و برای روش HDI ، از تابع hdi در پکیج $HDIInterval$ استفاده کردیم [۱۶، ۱۸].

۳ یافته‌ها

شکل ۲ نمودار جعبه‌ای میزان حداکثر بارش سالانه در ایستگاه‌های مختلف در طی ۲۰ سال نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود متوسط حداکثر بارش در ایستگاه انزلی نسبت به بقیه بیشتر و متوسط حداکثر بارش در ایستگاه منجیل، واقع در جنوب استان، با توجه به شرایط آب و هوایی نیمه خشکی که دارد، نسبت به بقیه کمتر است.

۱.۳ تحلیل فراوانی

اولین گام در تجزیه و تحلیل فراوانی تعیین توزیعی است که بهترین برازش را به داده‌های حداکثر بارش سالانه دارد. نتایج نشان می‌دهد که از بین ۱۵ توزیع دو پارامتری و سه پارامتری مدنظر، توزیع دو پارامتری فرجه اغلب بهترین برازش به داده‌ها داشت، به طوری که در ۴ ایستگاه از ۵ ایستگاه به‌عنوان بهترین توزیع انتخاب شده است و یک ایستگاه هم توزیع دو پارامتری گاما به‌عنوان بهترین توزیع به دست آمد. انتخاب بهترین توزیع بر اساس معیار BIC است که در شرایط برابری نیکویی برازش توزیع‌های دو پارامتری و سه پارامتری برای یک

برای محاسبه احتمال پوشش بازه‌های اطمینان بر اساس چندک‌ها نیاز به محاسبه چندک داده اولیه و چندک داده‌های شبیه‌سازی شده است. چندک‌های متناظر با دوره‌های بازگشت $T = ۱۰, ۱۰۰, ۱۰۰۰$ محاسبه می‌شوند. طبق جدول ۳ و ۴ از بین ۱۵ توزیع، توزیع‌های فرجه و گاما به‌عنوان بهترین توزیع‌های دو پارامتری و توزیع‌های لگ نرمال سه پارامتری، مقادیر بیشینه تعمیم یافته و لگ پیرسون نوع ۳ به‌عنوان بهترین توزیع‌های سه پارامتری در ایستگاه‌های مختلف انتخاب شدند که چندک‌های این توزیع‌ها به ترتیب طبق روابط (۲) تا (۶) محاسبه می‌شوند:

$$\hat{x}_T = \hat{\beta} \left(\ln \left(\frac{T}{T-1} \right) \right)^{-\frac{1}{\hat{\alpha}}} \quad (۲)$$

$$\hat{x}_T = \frac{1}{\hat{\beta}} F_Y^{-1} \left(\frac{T-1}{T} \right), \quad Y \sim \text{Gamma}(\alpha, 1) \quad (۳)$$

$$\hat{x}_T = \hat{\theta} + \exp[\hat{\alpha} + \hat{\beta} \Phi^{-1} \left(\frac{T-1}{T} \right)], \quad \Phi' = \phi \sim N(0, 1) \quad (۴)$$

$$\hat{x}_T = \hat{\theta} - \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} \left[1 - \left(\ln \left(\frac{T}{T-1} \right) \right)^{-\hat{\alpha}} \right] \quad (۵)$$

(۶)

$$\hat{x}_T = \exp \left[\hat{\beta} F_Y^{-1} \left(\frac{T-1}{T} \right) + \hat{\theta} \right], \quad Y \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$$

که در آن α پارامتر شکل، β پارامتر مقیاس و θ پارامتر مکان توزیع‌ها هستند.

چون چندک توزیع‌های فوق شامل چند پارامتر هستند، ابتدا پارامترهای توزیع‌های برازش داده شده به داده‌های اصلی را به روش ماکسیمم درست‌نمایی برآورد و از روی آن چندک‌ها را به دست می‌آوریم و سپس با مرتب کردن چندک‌ها حدود اطمینان را برآورد می‌کنیم. در واقع فرآیند محاسبه احتمال پوشش و میانگین طول بازه اطمینان در چند گام زیر خلاصه می‌شود:

گام ۱: ابتدا برای داده‌های هر ایستگاه (داده‌های اصلی) بهترین توزیع (توزیع مادر) بر اساس ملاک BIC انتخاب می‌شود.

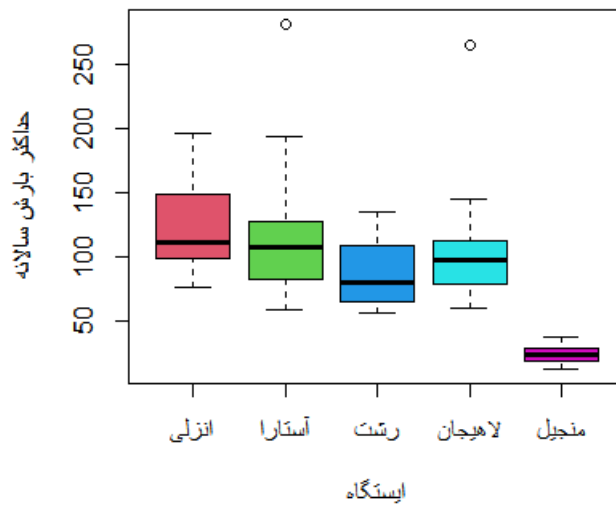
گام ۲: پارامترهای توزیع انتخاب شده با داده‌های اصلی به روش حداکثر درست‌نمایی برآورد می‌شود و با قرار دادن این برآوردها در توزیع مذکور مقدار چندک موردنظر (چندک اولیه) محاسبه می‌گردد.

گام ۳: یک نمونه n تایی X_1, X_2, \dots, X_n به صورت تصادفی از توزیع مادر با پارامترهای برآورد شده در گام قبل تولید می‌کنیم.

گام ۴: از نمونه تولید شده در گام قبل یک نمونه بوت‌استرپ $X_1^{B_1}, X_2^{B_1}, \dots, X_n^{B_1}$ تولید می‌کنیم. با این نمونه بوت‌استرپ مجدداً

آمد که در جدول پرننگ شده‌اند. برای هر ایستگاه بهترین توزیع برازش شده به‌عنوان توزیع مادر برای تولید نمونه‌های تصادفی انتخاب شده بود. جدول ۳ و ۴ پارامترهای برآورد شده بهترین توزیع برازش شده و بهترین توزیع سه پارامتری برازش شده به هر ایستگاه را نشان می‌دهد.

سری داده، توزیع دو پارامتری، یعنی مدلی با کمترین پارامتر را انتخاب می‌کند. برای بررسی رفتار توزیع‌های سه پارامتری، بهترین توزیع سه پارامتری با ملاک BIC بعد از توزیع‌های دو پارامتری را نیز در نظر می‌گیریم. به‌عنوان مثال، در جدول ۲ مقدار BIC برای توزیع‌های برازش شده در ایستگاه انزلی آورده شده است که بهترین توزیع دو و سه پارامتری، به ترتیب توزیع فرچه و لگ نرمال سه پارامتری به دست



شکل ۲: حداکثر بارش سالانه در ایستگاه‌های مختلف (میلی‌متر)

جدول ۲: مقادیر BIC برای توزیع‌های برازش شده در ایستگاه انزلی

توزیع گامبل	لگ-لجستیک	مقادیر بیشینه تعمیم‌یافته	لجستیک تعمیم‌یافته	لگ-گاما
BIC ۲۰۱/۸۵	۲۰۳/۷۸	۲۰۴/۱۷	۲۰۴/۵۶	۲۰۴/۶۸
توزیع لگ پیرسون و فرچه	لگ نرمال	گاما	نرمال	توزیع نمایی
BIC ۲۰۳/۵۷	۲۰۶/۰۶	۲۰۲/۳۶	۲۰۳/۱۸	۲۰۵/۷۷
توزیع فرچه	پارتو تعمیم‌یافته	پیرسون نوع ۳	لگ نرمال سه پارامتری	BIC
۲۰۱/۱۹	۲۰۴/۸۸	۲۱۷/۷۳	۲۰۳/۴۸	۲۳۵/۴۶

جدول ۳: پارامترهای برآورد شده بهترین توزیع برازش شده

ایستگاه	بهترین توزیع	α	β
انزلی	فرچه	۴/۳۴	۱۰۳/۴۸
آستارا	فرچه	۳/۱۵	۸۹/۶۵
رشت	فرچه	۴/۳۴	۷۳/۴۳
لاهیجان	فرچه	۴/۰۸	۸۶/۸۱
منجیل	گاما	۱۳/۲۶	۰/۵۵

جدول ۴: پارامترهای برآورد شده بهترین توزیع سه پارامتری برازش شده

ایستگاه	بهترین توزیع سه پارامتری	α	β	θ
انزلی	لگ نرمال سه پارامتری	۰/۲۷	۴/۷۹	-۱/۹۹
آستارا	لگ نرمال سه پارامتری	۰/۶۴	۴/۰۹	۴۲/۳۱
رشت	لگ پیرسون نوع ۳	۱/۷۳	۰/۲۴	۴/۰۰
لاهیجان	مقادیر بیشینه تعمیم یافته	۰/۲۱	۲۱/۸۴	۸۸/۶۹
منجیل	مقادیر بیشینه تعمیم یافته	-۰/۱۴	۵/۸۳	۲۱/۱۵

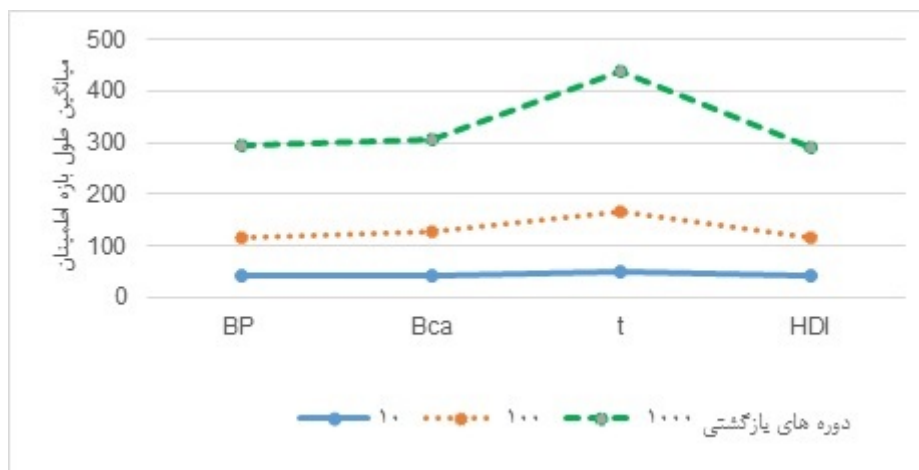
۲.۳ مقایسه روش‌های بوت‌استرپ

بهترین توزیع‌های برازش شده دو و سه پارامتری، دوره‌های بازگشتی، تعداد نمونه (n) از توزیع مادر شبیه‌سازی شده و ۴ روش بوت‌استرپ (همراه با تعداد تکرار داخل پرانتز) برای محاسبه میانگین طول بازه‌های اطمینان در ۵ ایستگاه در جدول ۵ ارائه شده است. طبق جدول ۵، کمترین میانگین طول بازه اطمینان به دست آمده در بین ۴ روش و توزیع‌های برازش شده در همه ایستگاه‌ها، مربوط به روش HDI است. به عنوان نمونه، شکل ۳ به ازای T ‌های مختلف و برای توزیع فرچه در ایستگاه انزلی، این موضوع را نشان می‌دهد و می‌توان مشابه آن را برای سایر توزیع‌ها و ایستگاه‌ها رسم نمود. از لحاظ تعداد نمونه بوت‌استرپی لازم تا رسیدن به سطح اطمینان اسمی ۰/۹۵ معمولاً توزیع‌های دو پارامتری تعداد نمونه بوت‌استرپ کمتری نسبت به توزیع‌های سه پارامتری لازم دارند. از لحاظ تعداد تکرار لازم (B) تا رسیدن به سطح اطمینان اسمی ۰/۹۵ هم معمولاً روش t -بوت‌استرپ تعداد تکرار کمتری لازم دارد. به عنوان مثال، در شکل ۴ تعداد تکرار لازم برای رسیدن به سطح اطمینان ۰/۹۵ برای توزیع فرچه با $T = 10$ و $n = 60$ به روش BP در ایستگاه انزلی نشان داده شده است.

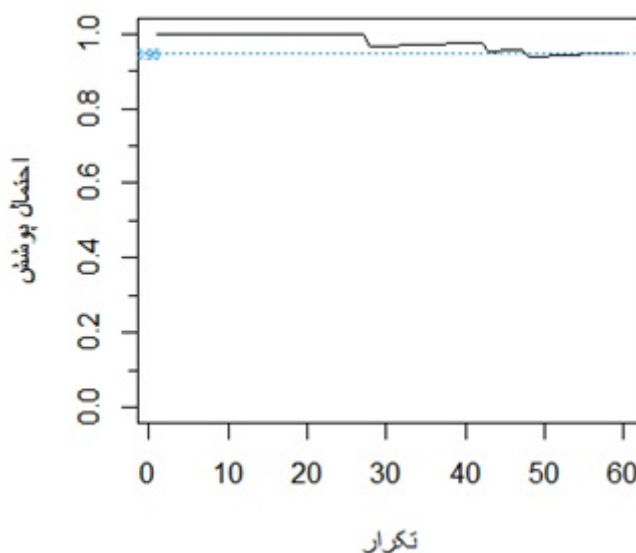
پس از انتخاب بهترین توزیع برازش شده به داده‌ها، از آن‌ها برای برآورد چندک‌های متناظر با دوره‌های بازگشتی متفاوت $10, 100, 1000$ سال استفاده شده بود. آنگاه میانگین بازه‌های اطمینان، با B بار تکرار نمونه‌گیری، n ‌های مختلف و با استفاده از چهار روش بوت‌استرپ ساخته شده بودند (جدول ۵). جدول ۵ نشان می‌دهد که طول بازه‌های اطمینان با افزایش دوره‌های بازگشتی افزایش می‌یابد. عریض‌ترین بازه‌های اطمینان مربوط به روش t -بوت‌استرپ و کوتاه‌ترین بازه‌های مربوط به روش HDI است. از لحاظ توزیع نیز عریض‌ترین میانگین بازه‌های اطمینان مربوط به توزیع‌های سه پارامتری GEV و $LP3$ و کوتاه‌ترین میانگین بازه‌های اطمینان مربوط به توزیع گاما می‌باشد. طبق [۹] طول بازه اطمینان با مقدار ضریب چولگی و انحراف معیار هر سری داده در ارتباط است. هر چه این مقادیر بیشتر باشد طول بازه نیز بیشتر است. طبق جدول ۱ داده‌های ایستگاه منجیل دارای کمترین مقدار ضریب چولگی و انحراف معیار بودند که طول بازه اطمینان با بهترین توزیع برازش داده شده در آن ایستگاه، نیز کمترین بود. ترکیبی از

جدول ۵: میانگین طول فاصله اطمینان (با تعداد تکرار) با روش‌های بوت استرپ

HDI	t	BCA	BP	n	T	توزیع برآزش شده	ایستگاه
۴۰/۵۶(۶۰)	۴۷/۷۹(۲۰)	۴۳/۲۱(۶۰)	۴۱/۰۱(۶۰)	۶۰	۱۰	فرچه	انزلی
۱۱۶/۲۵(۲۰)	۱۶۵/۸۰(۲۰)	۱۲۷/۹۹(۸۰)	۱۱۶/۵۷(۲۰)	۶۰	۱۰۰		
۲۹۱/۲۳(۴۰)	۴۴۰/۲۵(۲۰)	۳۰۴/۹۸(۲۰)	۲۹۶/۲۹(۴۰)	۶۰	۱۰۰۰		
۲۴/۵۰(۱۲۰)	۲۶/۷۱(۲۰)	۲۵/۵۵(۱۰۰)	۲۴/۹۸(۱۲۰)	۱۰۰	۱۰	لگ نرمال سه پارامتری	انزلی
۵۲/۹۲(۴۰)	۵۸/۹۷(۲۰)	۵۸/۹۶(۶۰)	۵۴/۷۴(۸۰)	۱۰۰	۱۰۰		
۹۴/۳۲(۱۰۰)	۱۰۴/۹۸(۲۰)	۱۱۲/۴۸(۲۰)	۱۰۰/۳۰(۲۰۰)	۶۰	۱۰۰۰		
۷۸/۸۹(۱۰۰)	۱۰۹/۸۱(۲۰)	۸۳/۲۰(۱۴۰)	۸۰/۶۱(۱۰۰)	۴۰	۱۰	فرچه	آستارا
۲۶۲/۷۴(۲۰)	۴۱۱/۲۵(۲۰)	۳۰۱/۱۳(۱۲۰)	۲۷۴/۳۲(۳۰۰)	۴۰	۱۰۰		
۵۸۶/۶۲(۶۰)	۷۵۸/۸۹(۴۰)	۶۴۰/۲۳(۲۰)	۵۹۷/۰۸(۲۰)	۶۰	۱۰۰۰		
۴۹/۵۰(۲۰)	۶۴/۱۷(۲۰)	۵۳/۸۴(۲۰)	۴۹/۹۳(۲۰)	۱۰۰	۱۰	لگ نرمال سه پارامتری	آستارا
۱۷۰/۳۹(۶۰)	۳۳۴/۶۹(۲۰)	۲۴۹/۹۹(۴۰)	۱۸۳/۵۴(۶۰)	۸۰	۱۰۰		
۴۷۳/۴۹(۲۰)	۱۲۳۰/۳۲(۲۰)	۷۳۰/۲۲(۶۰)	۵۰۴/۸۷(۲۰)	۱۲۰	۱۰۰۰		
۷۸/۸۹(۲۰)	۱۱۰/۵۱(۲۰)	۹۱/۸۸(۲۰)	۸۱/۲۲(۲۰)	۲۰	۱۰	فرچه	رشت
۹۱/۵۹(۱۰۰)	۱۱۷/۵۲(۲۰)	۱۰۱/۶۳(۲۰)	۹۷/۲۹(۲۰)	۸۰	۱۰۰		
۱۸۳/۱۹(۲۰)	۲۱۹/۷۳(۲۰)	۲۰۴/۸۵(۱۴۰)	۱۹۰/۳۴(۲۰)	۱۲۰	۱۰۰۰		
۴۵/۹۹(۴۰)	۵۷/۶۴(۴۰)	۵۶/۹۲(۴۰)	۴۷/۲۲(۱۰۰)	۱۰۰	۱۰	لگ پیرسون نوع ۳	رشت
۲۳۹/۹۴(۲۰)	۲۶۱/۷۲(۶۰)	۳۱۰/۲۷(۴۰)	۲۶۰/۴۰(۲۰)	۱۴۰	۱۰۰		
۳۴۷۳/۶۷(۲۰)	۱۰۹۹۰۵۸(۲۰)	۸۳۵۹۶۹۴۰(۲۰)	۵۸۵۳۰/۲(۲۰)	۲۰	۱۰۰۰		
۴۸/۵۶(۱۴۰)	۵۶/۳۸(۲۰)	۵۲/۹۶(۱۴۰)	۴۹/۸۶(۱۴۰)	۴۰	۱۰	فرچه	لاهیجان
۹۹/۰۷(۲۰)	۱۲۳/۰۴(۲۰)	۱۰۴/۴۷(۲۰)	۱۰۰/۵۹(۲۰)	۱۲۰	۱۰۰		
۳۲۱/۰۳(۲۰)	۴۰۶/۰۵(۲۰)	۳۵۳/۰۵(۱۰۰)	۳۳۴/۹۲(۲۰)	۶۰	۱۰۰۰		
۶۱/۶۹(۴۰)	۴۰۴/۲۶(۴۰)	۹۹/۰۶(۲۰)	۷۶/۲۳(۸۰)	۸۰	۱۰	مقادیر بیشینه تعمیم یافته	لاهیجان
۲۴۵/۵۹(۴۰)	۱۴۸۲۲/۳۳(۲۰)	۱۰۶۴۲/۸(۴۰)	۴۴۸/۲۵(۲۰)	۸۰	۱۰۰		
۵۶۴/۳۰(۲۰)	۲۷۲۰۵۲۲۸(۴۰)	۱۶۱۹۷۳۸(۴۰)	۳۷۳۶/۴۱(۲۰)	۱۴۰	۱۰۰۰		
۳/۲۷(۲۰)	۳/۷۳(۲۰)	۳/۴۰(۱۸۰)	۳/۳۵(۲۰)	۱۲۰	۱۰	گاما	منجیل
۵/۷۴(۲۰)	۶/۷۲(۶۰)	۶/۱۲(۶۰)	۵/۸۲(۲۰)	۱۰۰	۱۰۰		
۷/۳۸(۲۰)	۸/۷۹(۲۰)	۷/۷۰(۲۰)	۷/۵۳(۲۰)	۱۲۰	۱۰۰۰		
۵/۸۴(۲۰)	۶/۸۲(۴۰)	۶/۹۴(۲۰)	۶/۵۲(۲۰)	۱۴۰	۱۰	مقادیر بیشینه تعمیم یافته	منجیل
۸/۲۱(۲۰)	۲۱/۳۵(۴۰)	۳۱/۵۲(۲۰)	۸/۶۸(۲۰)	۱۴۰	۱۰۰		
۱۴/۹۶(۴۰)	۱۲۴۱۱۹۸(۶۰)	۳۱۰۵۲۲۷۱(۲۰)	۱۶/۰۵(۴۰)	۱۶۰	۱۰۰۰		



شکل ۳: میانگین طول بازه اطمینان با روش‌های مختلف بوت استرپ و دوره‌های بازگشتی متفاوت در ایستگاه انزلی



شکل ۴: تعداد تکرار و احتمال پوشش برای توزیع فرجه با $T = 10$ و به روش BP در ایستگاه انزلی

ایستگاه‌های مختلف، همواره توزیع‌های دو پارامتری نسبت به توزیع‌های سه پارامتری برازش بهتری برای داده‌های مورد بررسی داشتند. به‌طور کلی عریض‌ترین بازه‌های اطمینان با روش‌های t و BCA بوت‌استرپ و باریک‌ترین بازه‌های اطمینان هم با روش‌های HDI و BP حاصل شده بودند. در نهایت، روش HDI کمترین میانگین طول بازه اطمینان را در بین همه روش‌ها داشت. همچنین از لحاظ توزیع به‌کاررفته و طول بازه اطمینان، توزیع دو پارامتری گاما بازه‌های اطمینان باریک‌تر و توزیع‌های سه پارامتری GEV و $LP3$ بازه‌های اطمینان عریض‌تر ارائه کرده‌اند.

برای کسب احتمال پوشش چندک دقیقاً برابر سطح اطمینان ۹۵٪، تعداد نمونه‌های مختلف $n = 20, 40, \dots, 160$ که از توزیع مادر شبیه‌سازی شده

۳.۳ بحث و نتیجه‌گیری

برای تحلیل فراوانی مقادیر بیشینه رویدادهای هیدرولوژی، باید هم توزیع دو پارامتری و هم توزیع سه پارامتری در نظر گرفته شود و یک ملاک انتخاب مناسب مانند BIC ، برای انتخاب بهترین توزیع برازش شده به داده‌ها به کار گرفته شود. برتری توزیع‌های دو پارامتری این است که عدم حتمیت کمتری در برآورد چندک‌ها وجود دارد که منجر به بازه‌های اطمینان کوتاه‌تری می‌شود. بهترین توزیعی برای داده‌هایی که در این تحقیق استفاده شده است توزیع دو پارامتری فرجه است که در ۸۰ درصد ایستگاه‌ها به‌عنوان بهترین توزیع انتخاب شده بود که می‌توان از آن برای مطالعات مشابه که با مقادیر حداکثر بارش سالانه سروکار دارند، استفاده نمود. با توجه به توزیع‌های برازش شده برای داده‌های

را در نظر می‌گیریم که معمولاً توزیع‌های دو پارامتری نسبت به توزیع‌های سه پارامتری تعداد نمونه کمتری تا رسیدن به سطح اطمینان ۹۵٪ لازم دارند. از لحاظ تعداد تکرارهای لازم (B) تا رسیدن به سطح اطمینان ۹۵٪ هم معمولاً روش t -بوت استرپ تعداد تکرار کمتری لازم داشت، اگرچه مدت‌زمان اجرای دستور این روش در نرم‌افزار R طولانی‌تر بود.

مراجع

- [1] Cheng, K.S., Chiang, J.L., and Hsu, C.W. (2007). Simulation of probability distributions commonly used in hydrological frequency analysis. *Hydrol. Process.*, **21**, 51–60.
- [2] Davison, A.C. and Hinkley, D.V. (1997). *Bootstrap Methods and Their Application*, 1st ed. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [3] DiCiccio, T.J., and Efron, B. (1996). Bootstrap confidence intervals. *Statist. Sci.*, **11**, 3, 189–228.
- [4] Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife, *Ann. Statist.*, **7**, 1, 1-26.
- [5] Efron, B. (1981). Non-Parametric Standard Errors and Confidence Intervals, *The Canadian Journal of Statistics*, **9**, 139-158.
- [6] Efron, B. (1987). Better Bootstrap Confidence Intervals, *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 171-185.
- [7] Efron, B. and Tibshirani, R. (1986). Bootstrap methods for standard errors, confidence intervals, and other measures of statistical accuracy, *Statistical Science*, **1**, 54–75.
- [8] Fatih T. and Ercan K. (2020). Definition of the best probability distribution functions for annual minimum flows in the rivers of the Upper Euphrates River Basin, Turkey, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, **737**, 012166.
- [9] Flowers-Cano, R.S., Ortiz-Gómez, R., León-Jiménez, J.E., López Rivera, R., and Perera Cruz, L.A. (2018). Comparison of Bootstrap Confidence Intervals Using Monte Carlo Simulations, *Water*, **10**, 166.
- [10] Grimaldi, S., Kao S.C., Castellarin, A., Papalexiou, S.M., Viglione, A., Laio, F., Aksoy, H., and Gedikli A. (2011). *Statistical Hydrology*, Peter Wilderer (ed.) Treatise on Water Science, **2**, 479–517. Oxford: Academic Press.
- [11] Hall, M.J., Van den Boogaard, H.F.P., Fernando, R.C., and Mynett, A.E. (2004). The construction of confidence intervals for frequency analysis using resampling techniques. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, **8**, 235–246.
- [12] Hall, M. and Mayo, M.S. (2008). Bootstrap Confidence Intervals and Coverage Probabilities of Regression Parameter Estimates Using Trimmed Elemental Estimation, *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, **7**, 2.
- [13] Hyndman, R.J. (1996). Computing and graphing highest density regions, *American Statistician*, **50**, 120-126.
- [14] Jung, K., Lee J., Gupta, V., and Cho, G. (2019). Comparison of Bootstrap Confidence Interval Methods for GSCA Using a Monte Carlo Simulation, *Front. Psychol.*, **10**, 2215.
- [15] Kruschke, J. (2011). *Doing Bayesian data analysis: a tutorial with R, JAGS, and Stan*, ISBN: 978-0-12-405888-0.
- [16] Meredith, M. and Kruschke, J. (2020). *HDInterval R package version 0.2.2.*, <https://github.com/mikemeredith/HDInterval.git>.

- [17] Ologhadien, I. (2021). Selection of Probabilistic Model of Extreme Floods in Benue River Basin, Nigeria, *European Journal of Engineering and Technology Research*, **6**, 1.
- [18] Rizzo, M.L. (2019). *Statistical computing with R*, Second edition, Boca Raton, CRC Press, Taylor & Francis Group.
- [19] Van de Boogaard, H.F.P., and Hall, M.J. (2004). The construction of confidence intervals for frequency analysis using resampling techniques, A supplementary note. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, **8**, 1174–1178.
- [20] Zhu, Y., and Kolassa, J. (2017). Assessing and Comparing the Accuracy of Various Bootstrap Methods”, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **47**, 2436-2453.

Bootstrap Highest Density Confidence Interval with Application to Climatological Data

Mehdi Pejman¹ Ali Shadrokh² Adel Mohammadpoor³

Abstract:

Bootstrap is a computer-based resampling and statistical inference method that can provide an estimate for the uncertainty of distribution parameters and quantiles in frequency analysis. In this article, in addition to calculating the bootstrap confidence interval for quantiles with percentile bootstrap (*BP*), accelerated bias-corrected bootstrap (*BCA*), and *t*-bootstrap methods, the calculation of the confidence interval is proposed using the bootstrap highest density method (*HDI*) for the probability distributions used in hydrology data. We obtain the average length of the confidence interval as a criterion for evaluating the methods.

To calculate the average length of the confidence interval with different methods, first, the best distribution among widely used distributions is fitted to the original data, and the parameters of the fitted distribution are estimated using the maximum likelihood method to obtain the quantiles. Then, we continue by repeating the simulated bootstrap samples until the probability of covering the real quantile reaches the nominal confidence level of 0.95. The simulation results show that the bootstrap highest density method gives the lowest average confidence interval length among all methods.

In previous studies, the probability of coverage with the same number of samples as the original sample and the number of bootstrap repetitions (for example, 1000) have been obtained, and finally, the coverage probability closest to the nominal value of 0.95 was chosen as the optimal state. In this article, to avoid a large number of bootstrap iterations, considering the number of different samples $n = 20, 40, 60, \dots, 160$ that are simulated from the mother distribution, we continue the number of iterations of the bootstrap samples only until reaching the coverage probability of 0.95. Usually, two-parameter distributions require fewer samples than three-parameter distributions. In terms of the number of necessary repetitions (*B*) to reach the 95% confidence level, the *t*-bootstrap method usually required fewer repetitions, although the implementation time of this method was longer in R software.

The best distribution for the data used in this research is the two-parameter Frechet distribution, which was selected as the best distribution in 80% of the stations, and can be used for similar studies dealing with maximum annual precipitation values. According to the fitted distributions for the data of different stations, two-parameter distributions always fit the data better than three-parameter distributions.

In general, the widest confidence intervals were obtained with *BCA* and *t*-bootstrap methods, and the shortest confidence intervals were obtained with *HDI* and *BP* methods. Also, in terms of the distribution used and the length of the confidence interval, the two-parameter Gamma distribution has provided shorter confidence intervals, while the three-parameter *GEV* and *LP3* distributions have provided wider confidence intervals.

Keywords: Resampling Bootstrap Method, Quantile, Cover Coverage, Extreme-Values.

¹Department of Statistics, Payame Noor University (PNU), P.O.Box 19395-4697, Tehran, Iran. Email:m.pejman1359@gmail.com

²Department of Statistics, Payame Noor University (PNU), P.O.Box 19395-4697, Tehran, Iran. Email:a.shadrokh@pnu.ac.ir

³Department of Statistics, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran. Email:adel@aut.ac.ir