رویکرد بهینه‌یابی ترکیبی تحت سانسور فزاینده نوع دوم با خروج تصادفی وابسته به فواصل شکست

فاطمه حسن‌تبار درزی [۱] فیروزه حقیقی [۲] سمانه افتخاری مهابادی [۳]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۰۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۲۲

چکیده:
از میان بردار خروج‌های مختلف در سانسور فزاینده نوع دوم، یافتن بردار خروج بهینه با استفاده از رویکردهای بهینه‌یابی در آزمایش‌های طول‌عمر موردتوجه است. رویکردهای بهینه‌یابی چند-هدفه با در نظر گرفتن چند هدف به‌صورت هم‌زمان، سعی در یافتن طرح بهینه می‌نمایند. در این مقاله با در نظر گرفتن دو معیار و استفاده از رویکردهای بهینه‌یابی ترکیبی، بردار خروج بهینه در سانسور فزاینده نوع دوم با مکانیسم خروج تصادفیِ وابسته مبتنی بر تابع ربط لوجیت به دست آورده می‌شود. مکانیسم خروج تصادفیِ وابسته مبتنی بر مدل لوجیت در نظر گرفته‌شده، شامل پارامترهای تنظیمی است که به‌وسیله آزمایشگر و با توجه به اهداف آزمایش و فواصل شکست احتمالی تنظیم و تعیین می‌گردد. این پارامترها، امکان تنظیم احتمال خروج را در مکانیسم سانسور در جهت کاهش هزینه و زمان آزمایش فراهم می‌کند. تعیین مقدار بهینه این پارامترها با توجه به معیار بهینگی مدنظر، بردار خروج بهینه را نتیجه می‌دهد. مطالعات شبیه‌سازی برای ارزیابی رویکرد بهینه‌یابی ترکیبی و مقایسه آن با معیارهای بهینه‌یابی تک-هدفه در مکانیسم سانسور تصادفیِ وابسته انجام می‌گردد. در انتها نتایج و پیشنهادها ارائه‌شده است.

واژه‌های کلیدی: سانسور فزاینده نوع دوم، مکانیسم سانسور تصادفیِ وابسته مبتنی بر مدل لوجیت، رویکرد بهینه‌یابی ترکیبی، طرح بهینه چند-هدفه، میانگین زمان آزمایش، هزینه سانسور.

۱ مقدمه

در آزمایش‌های طول‌عمر، تعیین طرح سانسور بهینه در میان همه طرح‌های ممکن، یک مسئله عملی، ضروری و مهم است که با ماکسیمم یا مینیمم کردن معیار بهینه مناسب، می‌توان به آن دست‌یافت. تعیین طرح بهینه به معیار بهینه موردنظر آزمایشگر بستگی مستقیم دارد. معیارهای بهینه در آزمایش‌های طول‌عمر معمولاً بر اساس ماکسیمم کردن دقت و مینیمم کردن هزینه و زمان آزمایش بکار برده می‌شوند. طرح‌های بهینه تک-هدفه که بر اساس یک معیار ساخته می‌شوند، در آزمایش‌های طول‌عمر متداول و پرکاربرد هستند. اولین بار بالاکریشنان و آگاروالا [۲] واریانس بهترین برآوردگرهای نااریب خطی پارامترهای مدل را به‌عنوان معیار بهینه در سانسور فزاینده نوع دوم برای توزیع نرمال و توزیع‌های مقدار کرانگین بکار بردند. بارچارت [۱۲، ۱۱] با بکار بردن معیار بهینه مشابه، طرح سانسور بهینه را برای توزیع تعمیم‌یافته پارتو در سانسور فزاینده نوع دوم یافت. همچنین بارچارت [۱۰] معیارهای بهینه بیشتری را بر اساس ماتریس اطلاع فیشر معرفی کرده و برای یافتن طرح سانسور بهینه بکار برد. نگ و همکاران [۲۳] واریانس برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی را برای یافتن طرح سانسور بهینه در توزیع وایبول معرفی کردند. در واقع آن‌ها چندین معیار بهینه را بر اساس ماتریس اطلاع فیشر ارائه دادند. ماتریس اطلاع فیشر به‌عنوان معیار بهینه توسط محققین دیگری از جمله: ابو الن [۱]، بالاکریشنان و همکاران [۳]، کرامر و انزنباخ [۱۴] و کرامر و اشمیت [۱۵] موردبحث و بررسی قرار گرفت. پرادان و کوندو [۲۵، ۲۴] معیار بهینه بر اساس واریانس مجانبی برآوردگر چندک pام را برای توزیع‌های طول‌عمر پیشنهاد دادند. معیار دقت برآورد چندک pام توسط کوندا [۱۹] و بالاکریشنان و هان [۴] نیز بکار گرفته شد. همچنین در نظر گرفتن معیارهایی بر اساس هزینه تغییرات آزمایش توسط برخی محققان موردبررسی قرار گرفت. باتاچاریا و همکاران [۸] برای تعیین

[۱] دانشجوی دکتری، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشکده علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران.
[۲] دانشیار، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشکده علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران. (نویسنده مسئول:fhaghighi@ut.ac.ir)
[۳] دانشیار، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشکده علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

طرح سانسور بهینه در سانسور فزاینده نوع دوم، الگوریتمی ابتکاری که بر اساس جستجو در همسایگی متغیر عمل می‌کند را پیشنهاد دادند. در نظرگرفتن رویکرد احتمالی برای تعیین طرح سانسور بهینه با استفاده از معیارهای هزینه و واریانس توسط باتاچاریا و بالاکریشنان [۶] ارائه‌شده است.

اخیراً طرح‌های بهینه با در نظرگرفتن دو معیار به‌صورت هم‌زمان در آزمایش‌های طول‌عمر موردتوجه بیشتری قرار گرفتند. طرح‌های بهینه مقید [۴] و طرح‌های بهینه ترکیبی [۵] از جمله رویکردهایی هستند که برای یافتن طرح بهینه با در نظرگرفتن دو معیار پیشنهادشده‌اند. طرح بهینه مقید با بهینه‌سازی یک معیار و قرار دادن معیار دیگر به‌صورت قید و شرط ساخته می‌شود. طرح بهینه ترکیبی بر اساس ایجاد معیاری بر اساس میانگین وزنی دو معیار تعریف می‌گردد. برای اطلاع بیشتر در مورد این طرح‌ها می‌توانید به لاتر [۲۰] و کوک و وونگ [۱۳] مراجعه کنید. در آزمایش‌های طول‌عمر، استفاده از طرح‌های بهینه مقید در سانسور دورگه‌ای [۶] توسط باتاچاریا [۹] بکار برده شد. در واقع، سانسورهای دورگه برحسب چگونگی خاتمه دادن به آزمایش که بر مبنای میانگین زمان آزمایش یا تعداد واحدهای به شکست رسیده یا ترکیبی از هر دو باشد به انواع مختلفی تقسیم می‌گردد. همچنین باتاچاریا [۵] در سانسور فزاینده نوع دوم برای یافتن بردار خروج بهینه از روش بهینه‌یابی ترکیبی استفاده کرد. در جهان امروز، روش‌های بهینه‌سازی چند-هدفه [۷] بسیار موردتوجه محققین قرارگرفته است. در واقع در روش‌های بهینه‌سازی چند-هدفه محدودیتی برای تعداد معیار وجود ندارد. برای آشنایی با روش‌های مختلفی که در این رویکرد وجود دارد می‌توان خوانندگان را به ارگوت [۱۶] ارجاع داد.

در میان انواع مختلف سانسور در آزمایش‌های طول‌عمر، سانسور فزاینده نوع دوم [۸] این امکان را فراهم می‌سازد که بدون به شکست رساندن واحدهای آزمایش، با خارج کردن واحدها در زمان‌های مختلف شکست از اطلاعات موجود در آن استفاده گردد. در واقع این نوع سانسور بر مبنای تعداد واحدهای به شکست رسیده می‌باشد. در این نوع سانسور، محقق زمان آزمایش را بعد از دیدن m شکست به پایان می‌رساند. در اولین زمان شکست، R_1 محصول از آزمایش کنار گذاشته می‌شود و در دومین زمان شکست، R_2 محصول از آزمایش کنار گذاشته می‌شود و این رویه تا به شکست رسیدن m محصول ادامه می‌یابد و در mامین شکست تمامی محصولاتی که به شکست نرسیدند از آزمایش کنار گذاشته می‌شوند. به عبارتی تعداد واحدهای کنار گذاشته‌شده در mامین شکست برابر با $R_m = n - m - R_1 - \cdots - R_{m-1}$ است. محققان تعداد واحدهای خارج‌شده در سانسور فزاینده‌ی نوع دوم را با روش‌های مختلفی از جمله به‌صورت ثابت و از قبل مشخص‌شده یا متغیر تصادفی از توزیعی با پارامترهای ثابت تعیین می‌کنند. اخیراً حسن‌تبار و همکاران [۱۷] در سانسور فزاینده نوع دوم، مکانیسم خروج تصادفیِ وابسته به فواصل شکست تحت عنوان مدل Type-II PCRD ارائه داده‌اند، به‌گونه‌ای که تغییر شرایط آزمایش باعث خارج شدن تعداد متفاوتی واحد در هر مرحله از شکست می‌گردد. مکانیسم خروج تصادفیِ وابسته پیشنهادی آن‌ها قابلیت به‌روز کردن احتمال خروج در هر مرحله از آزمایش با توجه به فواصل شکست را دارد. در واقع برای وابسته کردن تعداد واحدهای خارج‌شده در هر مرحله به فواصل شکست از تابع ربط لوجیت که دارای پارامترهای تنظیمی جهت تعدیل و تنظیم رفتار مکانیسم خروج تصادفی است استفاده می‌شود. تعیین مقدار بهینه برای پارامترهای تنظیم جهت ایجاد بردار خروج بهینه مورد سؤال این تحقیق بوده است. در واقع برای مقدار ثابت n و m، طرح سانسور $\underline{R}$ و پارامترهای تنظیم $\alpha_i, i = 0, 1$ متناظر با آن در مکانیسم خروج تصادفیِ وابسته، پارامترهای موردعلاقه هستند. اگر $CS(n,m)$ را تعداد کل حالت‌های شامل بردار خروج در مدل Type-II PCRD در نظر بگیریم، آنگاه خواهیم داشت:

$$CS(n,m) = \{\underline{R} = (R_1, \ldots, R_m) \in \mathcal{N} | \alpha_0, \alpha_1, \mathcal{N} = 0, \ldots, n-m\}.$$

که یافتن بردار خروج بهینه با توجه به معیار بهینگی و رویکرد بهینه‌یابی مورد سؤال در این مقاله می‌باشد.

در ادامه در بخش ۲ سانسور فزاینده نوع دوم با مکانیسم سانسور تصادفیِ وابسته ارائه می‌گردد. از تابع ربط لوجیت در وابسته کردن مکانیسم سانسور به شرایط آزمایش استفاده‌شده و توزیع وایبول برای آزمایش طول‌عمر در نظر گرفته‌شده است. همچنین در این بخش معیارهای بهینگی موردنظر برای بهینه کردن بردار خروج در سانسور فزاینده نوع دوم با مکانیسم تصادفیِ وابسته به فواصل شکست معرفی‌شده است. در بخش ۳، رویکرد بهینه‌یابی ترکیبی با استفاده از کارایی نسبی بیان‌شده است. در واقع در این رویکرد با در نظرگرفتن ترکیب محدبی از معیارها سعی در بهینه کردن بردار خروج می‌نماید.

[4] Constrained optimal designs
[5] Compound optimal designs
[6] Hybrid censoring
[7] Multi-optimal design
[8] Type-II progressive censoring

بردار خروج بهینه و پارامترهای تنظیم بهینه در مدل پیشنهادی با استفاده از رویکرد ترکیبی در بخش ۴ به دست آورده شده است. در بخش ۵ طرح بهینه‌ی سانسور با استفاده از داده‌های واقعی ارائه‌شده است. نتایج و پیشنهادهایی جهت ادامه تحقیق در بخش ۶ ارائه می‌گردد.

۲ معرفی مدل Type-II PCRD و معیارهای بهینه

در این بخش مکانیسم سانسور تصادفیِ وابسته برای سانسور فزاینده نوع دوم در نظر گرفته می‌شود. مکانیسم سانسور تصادفی موردنظر، قابلیت به‌روز کردن احتمال خروج در هر مرحله از آزمایش با توجه به شرایط آزمایش (از جمله فواصل شکست) را دارد. تعداد خروج در این مکانیسم، متغیری تصادفی از توزیع دوجمله‌ای با احتمال موفقیت وابسته به فواصل شکست در نظر گرفته‌شده است. در واقع تعداد واحدهای خارج‌شده در هر مرحله از شکست، R_iها به‌شرط اطلاعات بیان‌شده‌ی فوق دارای توزیع‌های دوجمله‌ای شرطی به‌صورت زیر هستند،

$$\begin{aligned}
R_1 &\mid T_{1:m:n} \sim b(n-m, p_1),\\
&\vdots\\
R_i &\mid R_1,\dots,R_{i-1},T_{1:m:n},\dots,T_{i:m:n} \sim b(n-m-\sum_{j=1}^{i-1} R_j, p_i),\\
&\qquad i=2,\dots,m-1\\
&\vdots\\
R_m &= n-\sum_{i=1}^{m-1} R_i - m.
\end{aligned}$$

که در آن احتمال خروج مرحله iام (p_i) در توزیع دوجمله‌ای با استفاده از تابع ربط لوجیت به شرایط آزمایش وابسته می‌گردد. شرایط آزمایش در مرحله iام، می‌تواند شامل موارد مختلفی باشد که در اینجا فاصله شکست $(T_{i:m:n} - T_{i-1:m:n})$ در نظر گرفته‌شده است. مکانیسم سانسور تصادفی وابسته به فواصل شکست با تابع ربط لوجیت به‌صورت،

$$logit(p_i) = \alpha_0 + \alpha_1(T_{i:m:n} - T_{i-1:m:n}),$$

تعریف می‌گردد. لذا احتمال خروج در هر مرحله از شکست در مکانیسم سانسور تصادفیِ وابسته به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$p_i = \frac{e^{\alpha_0+\alpha_1(T_{i:m:n}-T_{i-1:m:n})}}{e^{1+\alpha_0+\alpha_1(T_{i:m:n}-T_{i-1:m:n})}}.$$

فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ نمونه‌های تصادفی مستقل و هم‌توزیع از توزیع وایبول با تابع توزیع $F(x;\beta,\gamma)=1-e^{-(\frac{x}{\gamma})^\beta}, x>0, \beta>0, \gamma>0$ باشند. $\underline{T}=(T_{1:m:n},\dots,T_{m:m:n})$ زمان‌های شکست m واحد از n نمونه تصادفی و $\underline{R}=(R_1,\cdots,R_m)$، بردار تعداد خروج‌های تصادفی در سانسور فزاینده نوع دوم باشند. با توجه به مکانیسم خروج تصادفی وابسته در نظر گرفته‌شده، تابع درستنمایی مدل Type-II PCRD تحت توزیع وایبول و تابع ربط لوجیت به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}
L(\xi;\underline{r},\underline{t}) &= C_R\frac{\beta}{\gamma}(\frac{t_1}{\gamma})^{\beta-1}exp\left[-(\frac{t_1}{\gamma})^\beta\right]\\
&\times \prod_{i=2}^{m}\frac{\beta}{\gamma}(\frac{t_i}{\gamma})^{\beta-1}e^{\left[(\frac{t_{i-1}}{\gamma})^\beta-(\frac{t_i}{\gamma})^\beta\right]^{n-i+1-\sum_{j=1}^{i-1}r_j}}\\
&\times \prod_{i=1}^{m-1}\binom{n-m-\sum_{j=1}^{i-1}r_j}{r_j}e^{(\alpha_0+\alpha_1(t_i-t_{i-1}))r_i}\\
&\times \left[1+e^{\alpha_0+\alpha_1(t_i-t_{i-1})}\right]^{-(n-m-\sum_{j=1}^{i-1}r_j)}.
\end{aligned}$$

که $C_R = n\Pi_{i=2}^{m}\left(n-i+1-\sum_{j=1}^{i-1}r_j\right)$ است. یافتن طرح خروج بهینه به معیارهای بهینگی موردنظر آزمایش بسیار وابسته است. با توجه به اینکه زمان و هزینه، عوامل مهمی در آزمایش‌های طول‌عمر هستند، معیارهای بهینگی زیر جهت یافتن طرح سانسور بهینه در نظر گرفته می‌شود.

- **تابع هزینه سانسور:** [9] وقوع سانسور در مراحل مختلف آزمایش در سانسورهای فزاینده نوع دوم، هزینه جانبی را به آزمایش تحمیل می‌کند که با توجه به اینکه در مراحل مختلفی از آزمایش انجام می‌پذیرد یکسان در نظر گرفتن آن معقول به نظر نمی‌رسد. لذا فرض می‌کنیم هزینه سانسور در مراحل مختلف آزمایش یکسان نبوده و هزینه سانسور در مراحل بالاتر آزمایش بیشتر از مراحل ابتدایی آزمایش باشد. به عبارتی فرض بر این است که واحدی که در مرحله iام از آزمایش خارج می‌گردد از واحدی که در مرحله jام که $i>j$ خارج می‌گردد هزینه بیشتری را به آزمایش تحمیل می‌کند که فرضیه معقولی در عمل نیز به نظر می‌رسد. لذا مؤلفه‌های تابع هزینه سانسور در نظر گرفته‌شده عبارت‌اند از: هزینه تعمیر و نصب مجدد، C_{0r}، هزینه وارد بر آزمایش به ازای هر واحد شکست، C_m و هزینه سانسور در مراحل مختلف شکست که با $\underline{C}_r=(C_{r_1},\cdots,C_{r_m})'$ نشان داده‌شده و متناظر با بردار خروج $\underline{R}=(R_1,\cdots,R_m)$، در نظر گرفته‌شده است. با توجه به مؤلفه‌های تعریف شده، تابع هزینه

[9] Censoring cost function

سانسور به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\phi_۱(\underline{R}) = C_{\circ r} + mC_m + E(\underline{R}\,\underline{C}_r). \qquad (۱)$$

- **تابع هزینه مدت‌زمان آزمایش:** طول مدت‌زمان آزمایش در آزمایش‌های طول‌عمر از اهمیت به سزایی برخوردار است به‌طوری‌که رابطه مستقیمی با هزینه‌های آزمایش دارد. لذا یکی از معیارهایی که در این نوع آزمایش‌های مدنظر قرار می‌گیرد معیار هزینه کل مدت‌زمان آزمایش بوده که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\phi_۲(\underline{R}) = C_{\circ t} + nC_n + C_t E(T_{m:m:n}), \qquad (۲)$$

که $C_{\circ t}$، هزینه نصب و راه‌اندازی و آزمودن تجهیزات، C_n، هزینه وارد بر آزمایش به ازای هر نمونه و C_t هزینه به ازای هر واحد زمان موردنیاز تا خاتمه آزمایش است.

قابل‌توجه است که تغییرپذیری آزمایش نیز یکی دیگر از موارد مهم و حائز اهمیت در آزمایش‌های طول‌عمر می‌باشد. به‌طوری‌که در شرایط یکسان، آزمایش‌هایی که دارای تغییرپذیری کمتری هستند ترجیح داده می‌شوند. معیارهای بهینه مختلفی برای اندازه‌گیری تغییرپذیری آزمایش وجود دارد که اکثر آن‌ها بر اساس ماتریس اطلاع فیشر هستند. معیار بهینه مربوط به تغییرپذیری که ما در این کار جهت مقایسه رویکرد بهینگی معرفی‌شده در نظر می‌گیریم تحت عنوان تغییرات واریانس مربوط به چندک pام برآورد پارامترهای مدل می‌باشد که خود می‌تواند به‌عنوان یک معیار بهینگی تحت عنوان تابع هزینه اندازه واریانس [۱۰] در نظر گرفته شود.

با در نظر گرفتن دو معیار (۱-۲) تحت مدل Type-II PCRD تابع‌های هزینه سانسور ($\phi_۱(\cdot)$) و هزینه مدت‌زمان آزمایش ($\phi_۲(\cdot)$)، به ترتیب به‌صورت زیر خواهد بود،

$$\phi_۱(\underline{R}) = C_{\circ r} + mC_m + E[\underline{R}\,\underline{C}_r|\mathcal{P}(\alpha_\circ, \alpha_۱)], \qquad (۳)$$

و

$$\phi_۲(\underline{R}) = C_{\circ t} + nC_n + C_t E[T_{m:m:n}|\mathcal{P}(\alpha_\circ, \alpha_۱)], \qquad (۴)$$

که

$$\mathcal{P}(\alpha_\circ, \alpha_۱) = (p_۱, \ldots, p_{m-۱}),$$
$$logit(p_i) = \alpha_\circ + \alpha_۱(T_i - T_{i-۱}), \quad i = ۱, \ldots, m-۱$$

و $\alpha_i, i = \circ, ۱$ پارامترهای تنظیم مکانیسم سانسور تصادفیِ وابسته مبتنی بر مدل لوجیت است. در قسمت بعدی رویکرد ترکیبی برای یافتن مقدار بهینه پارامترهای تنظیم و بردار خروج متناظر در مدل Type-II PCRD بیان می‌گردد.

۳ رویکرد طرح بهینه ترکیبی در مدل Type-II PCRD

فرض کنید که $\phi_۱(\cdot)$ و $\phi_۲(\cdot)$ دو معیار محدب و $\underline{R}^*_۱$ و $\underline{R}^*_۲$ بردار خروج بهینه متناظر با هر یک روی فضای بردارهای خروج $CS(n,m)$ باشند. برای هر معیاری، $\phi_i(\cdot), i = ۱, ۲$، بردار خروج بهینه، $\underline{R}^*_i, i = ۱, ۲$، به فضای بردارهای خروج تعلق دارد و معیار مربوطه را مینیمم می‌کند. از طرفی کارایی نسبی معیارها به ازای هر بردار خروج $\underline{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\Psi_۱(\underline{R}) = \frac{\phi_۱(\underline{R}^*_۱)}{\phi_۱(\underline{R})},$$
$$\Psi_۲(\underline{R}) = \frac{\phi_۲(\underline{R}^*_۲)}{\phi_۲(\underline{R})},$$

که $\Psi_۱(\cdot)$ و $\Psi_۲(\cdot)$ در بازه $[\circ, ۱]$ است. کارایی نسبی $(\Psi_i(\cdot))$، مقدار نزدیکی طرح انتخاب‌شده $(\underline{R})$ به طرح بهینه $(\underline{R}^*_i)$ را نشان می‌دهد. به عبارتی، اگر $\Psi_i(\underline{R}) \longrightarrow \circ, i = ۱, ۲$، در این صورت طرح انتخاب‌شده $(\underline{R})$ از طرح بهینه $(\underline{R}^*_i)$ فاصله زیادی دارد. حال اگر $\Psi_i(\underline{R}) \longrightarrow ۱, i = ۱, ۲$، عکس این موضوع برقرار بوده و دو طرح انتخابی و بهینه به هم نزدیک می‌باشند. یکی از ویژگی‌های جذاب شاخص کارایی نسبی این است که تفسیر آن به واحد اندازه‌گیری و اندازه فضای طرح بستگی ندارد. زمانی که معیارهای بهینگی در نظر گرفته‌شده از نظر مقیاس اندازه‌گیری متفاوت باشند، کارایی نسبی، برای ترکیب و مقایسه این معیارها می‌تواند مثمر ثمر واقع شود. توجه داشته باشید که از نظر کارایی نسبی، طرح بهینه ترکیبی به‌عنوان طرحی که تمام معیارها را به حداکثر می‌رساند تعریف می‌شود. لذا درصورتی‌که در رویکرد ترکیبی از شاخص کارایی نسبی برای ترکیب دو تابع استفاده شود برای یافتن طرح بهینه باید تابع ترکیبی ماکسیمم گردد. توجه کنید که رویکرد بهینه‌یابی ترکیبی در مدل Type-II PCRD بردار خروج بهینه را نتیجه می‌دهد و بردار خروج بهینه در این مدل متناظر با تعیین مقدار بهینه برای پارامتر تنظیم در مکانیسم سانسور تصادفیِ وابسته مبتنی بر مدل لوجیت است.

[10] Variance measure of cost function

بردار خروج بهینه با استفاده از رویکرد ترکیبی در مدل Type-II PCRD، با فرض $0 \leq \lambda \leq 1$ و با ترکیب دو معیار بهینه به دست آورده می‌شود. طرح سانسور بهینه این مرحله با $\underline{R}^*_\lambda$ نمایش داده می‌شود. $\underline{R}^*_\lambda$ در مدل Type-II PCRD متناظر با مقدار بهینه پارامترهای تنظیم $(\alpha^*_{0\lambda}, \alpha^*_{1\lambda})$، در مکانیسم سانسور تصادفیِ وابسته می‌باشد. یافتن طرح سانسور بهینه منوط به یافتن مقدار بهینه پارامترهای تنظیم در مکانیسم سانسور است. لذا برای به دست آوردن طرح سانسور بهینه به به‌صورت زیر عمل می‌گردد.

۱. ترکیب محدبی از کارایی نسبی دو تابع محدب $\phi_1(\cdot)$ و $\phi_2(\cdot)$ به‌صورت زیر ساخته می‌شود،

$$\Psi_{12}(\underline{R}|\lambda) = \lambda\Psi_1(\underline{R}) + (1-\lambda)\Psi_2(\underline{R}). \qquad (5)$$

۲. برای هر $\lambda \in [0,1]$، بردار خروجی که $\Psi_{12}(\cdot)$ را ماکسیمم کند به‌عنوان طرح سانسور بهینه ترکیبی به ازای λی مشخص نامیده شده و با $\underline{R}_\lambda$ نمایش داده می‌شود. واضح است که $\underline{R}_\lambda$ به طرح سانسور بهینه حاصل از تابع $\phi_1(\cdot)$ (و یا $\phi_2(\cdot)$) زمانی که $\lambda \longrightarrow 1$ (و یا $\lambda \longrightarrow 0$) نزدیک است.

۳. مقدار بهینه λ که به‌وسیله آن طرح بهینه مشخص می‌گردد با λ^* نمایش داده‌شده و با استفاده از روش پیشنهادی ایمهاف و وانگ [۱۸] به دست آورده می‌شود. آن‌ها روش گرافیکی را بر اساس نمودارهای کارایی نسبی، برای به دست آوردن طرح بهینه در (۵) پیشنهاد دادند. برای بکار بردن روش پیشنهادی آن‌ها، $\Psi_1(\underline{R}_\lambda)$ و $\Psi_2(\underline{R}_\lambda)$ در یک نمودار در مقابل λ رسم می‌شوند. نقطه تقاطع دو نمودار، λ^* را مشخص می‌کند. توجه کنید که استراتژی نمودارهای کارایی بسیار مفید است بخصوص زمانی که دو معیار روندهای مخالف هم داشته باشند. شایان‌ذکر است که معیارهای $\Psi_1(\cdot)$ و $\Psi_2(\cdot)$ به ترتیب توابع یکنوای کاهشی و افزایشی در مقابل λ می‌باشند.

۴. با توجه به λ^* مشخص‌شده در مرحله قبل، طرح بهینه ترکیبی به ازای λی مشخص (اشاره به طرح‌های بهینه در گام ۲ همین مرحله) متناظر با آن وجود دارد که بردار خروج بهینه $\underline{R}^*_\lambda$ را نتیجه می‌دهد. در مدل Type-II PCRD بر اساس مکانیسم سانسور تصادفیِ وابسته، $\underline{R}^*_\lambda$ با استفاده از مقادیر بهینه پارامترهای تنظیم، $\alpha^*_{i\lambda}, i = 0, 1$ مشخص می‌گردد. شایان‌ذکر است که طرح بهینه ترکیبی $(\underline{R}^*_\lambda)$ $\phi_{12}(\cdot)$ طرح بهینه برای هیچ‌کدام از توابع $\phi_1(\cdot)$ و $\phi_2(\cdot)$ به‌تنهایی نمی‌باشد بلکه طرح بهینه‌ای برای هر دو تابع به‌صورت هم‌زمان می‌باشد.

۴ شبیه‌سازی و کاربرد

در مدل Type-II PCRD مقادیر مختلفی از پارامترهای تنظیم مناسب را در مکانیسم سانسور تصادفیِ وابسته مبتنی بر مدل لوجیت می‌توان در نظر گرفت. تعیین بهترین مقدار برای پارامتر تنظیم در مکانیسم سانسور تصادفیِ وابسته، بستگی به معیار بهینه موردنظر دارد. در این بخش مقدار بهینه‌ی پارامترهای تنظیم با استفاده از رویکرد ترکیبی بر اساس دو معیار به دست آورده می‌شود. با توجه روابط (۳-۴)، معیارهای بهینه $\phi_1(\cdot)$ و $\phi_2(\cdot)$ در مدل Type-IIPCRD برای یافتن طرح بهینه ترکیبی در نظر گرفته‌شده است. طرح بهینه ترکیبی برای توزیع وایبول با پارامترهای $(\beta = 0.5, \gamma = 6)$ تحت مدل Type-II PCRD به دست آورده می‌شود. برای یافتن طرح بهینه ترکیبی مقدار اولیه پارامترها، در مطالعات شبیه‌سازی به‌صورت زیر در نظر گرفته‌شده است.

$$CS(n,m) = \{(6,3),(10,6),(15,5),(20,5)\},$$
$$(C_{0t}, C_n, C_t) = (100, 2, 12),$$
$$(C_{0r}, C_m, \underline{C}_r) = (50, 4, 8(1:m)),$$

همچنین مقدار عرض از مبدأ در مکانیسم سانسور تصادفیِ وابسته مبتنی بر مدل لوجیت مقدار ثابت $\alpha_0 = -2$ در نظر گرفته‌شده است.

بر اساس رویکرد ترکیبی که در بخش ۳ بیان شد، پس از ترکیب دو معیار محدب، باید طرح بهینه مربوط به هر یک از معیارها به‌صورت مجزا (بر اساس رویکرد بهینه تک-هدفه)، با در نظر گرفتن مقادیر مختلفی از α_1 در مکانیسم سانسور تصادفیِ وابسته به دست آورده شود. طرح بهینه تک- هدفه در معیارهای $\phi_1(\cdot)$ و $\phi_2(\cdot)$ را می‌توان با استفاده از روش‌های عددی به دست آورد. به‌طوری‌که هر طرح سانسوری که معیار بهینه را مینیمم کند به‌عنوان طرح سانسور بهینه انتخاب گردد. با توجه به اینکه $\phi_1(\cdot)$ و $\phi_2(\cdot)$ به‌طور تقریبی به ترتیب توابعی افزایشی و کاهشی از پارامترهای تنظیم هستند، می‌توان انتظار داشت، مقدار بهینه α_iها به ازای مقادیر کوچک و بزرگ حاصل می‌گردد. توجه کنید به دلیل وابسته بودن مکانیسم سانسور تصادفی به فواصل شکست، این رابطه اکید نیست. از طرفی در سانسور فزاینده نوع دوم با خروج ثابت، بردارهای $\underline{R}^*_1 = (n-m, 0, \ldots, 0)$ و $(0, \ldots, 0, n-m)$ به ترتیب بردارهای سانسور بهینه متناظر با $\phi_1(\cdot)$ و $\phi_2(\cdot)$ می‌باشند (به باتاچاریا [۵] مراجعه گردد). لذا به‌طور تقریبی، طرح سانسور بهینه در مدل Type-II PCRD به ازای مقادیر بزرگ و کوچک پارامترهای تنظیم ایجاد می‌گردد.

همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده‌شده است، روند نمودارهای کارایی $\Psi_1(\underline{R}_\lambda)$ و $\Psi_2(\underline{R}_\lambda)$ در مقابل λ مخالف هم بوده و به

ترتیب توابعی افزایشی و کاهشی از λ می‌باشند. با توجه به اینکه نمودار کارایی این دو معیار، یکنوا و دارای روند متضاد است، نقطه تقاطع (λ^*) این دو نمودار، طرح بهینه را ایجاد می‌کند. در شکل ۱، برای چهار ترکیب مختلف از نمونه تصادفی $CS(n,m) = \{(۶,۳),(۱۰,۶),(۲۰,۵),(۱۵,۵)\}$، مقدار λ^* در نقاط $\{۰/۶۵, ۰/۲۴, ۰/۷۱, ۰/۶۵\}$ حاصل‌شده است. طرحی که نقطه تقاطع را ایجاد می‌کند، طرح بهینه ترکیبی بوده و با $\underline{R}^*_\lambda$، نمایش داده می‌شود. از طرفی می‌دانیم که $\underline{R}^*_\lambda$ در مکانیسم سانسور تصادفیِ وابسته مبتنی بر مدل لوجیت با استفاده از مقدار بهینه پارامتر تنظیم (α^*_λ) که در شکل ۱ گزارش‌شده است، مشخص می‌گردد.

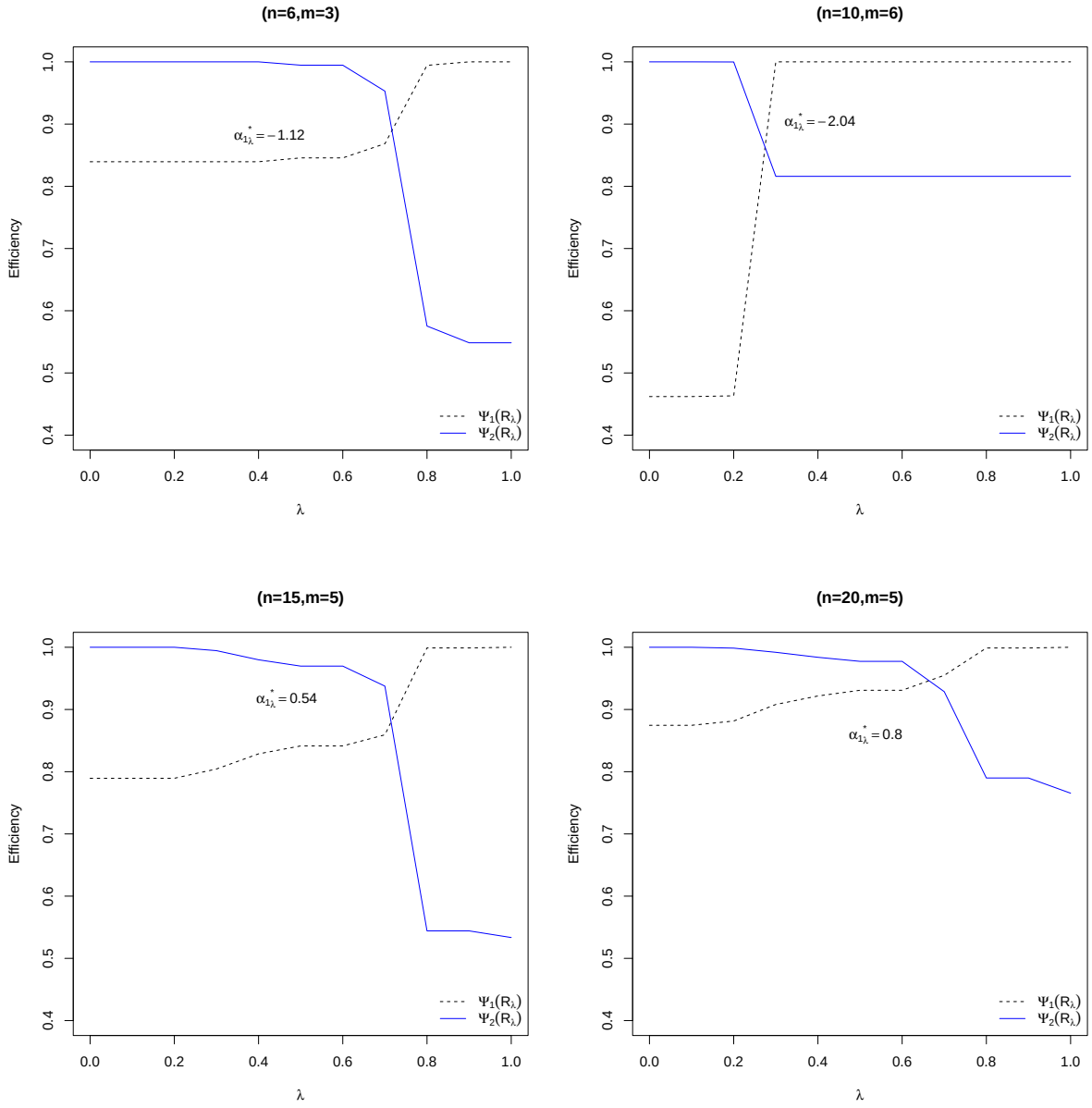
برای بررسی‌های بیشتر، مقایسه‌ای بین طرح‌های بهینه تک-هدفه بر اساس توابع $\phi_۱(\cdot)$ و $\phi_۲(\cdot)$ و طرح‌های بهینه ترکیبی ($\phi_{۱۲}(\cdot)$) انجام‌شده است. در جدول ۱ برای بردار خروج بهینه مربوط به هر معیار، میانگین زمان آزمایش، میانگین هزینه سانسور خروج و واریانس لگاریتم چندک pام از توزیع طول‌عمر وایبول گزارش‌شده است. طبق نتایج گزارش‌شده، طرح بهینه، تحت معیار $\phi_۱(\cdot)$، کمترین هزینه سانسور خروج را دارد که با توجه به معیار بهینه قابل پیش‌بینی می‌باشد، درصورتی‌که در همین طرح میانگین زمان آزمایش نسبتاً زیاد شده است؛ اما معیار $\phi_۲(\cdot)$، عکس این رفتار را دارد و هزینه سانسور خروج و واریانس چندک pام افزایش داشته است. طرح بهینه ترکیبی با رویکرد ترکیبی اثر توابع $\phi_۱(\cdot)$ و $\phi_۲(\cdot)$ را تعدیل کرده است و در هر سه معیار به‌صورت هم‌زمان مقادیر قابل‌قبول‌تری دارد. همان‌طور که جدول ۱ نشان داده است طرح بهینه ترکیبی رویکرد قابل‌قبول‌تری را برای زمانی که دو معیار باید به‌صورت هم‌زمان در نظر گرفته شوند ارائه می‌دهد.

۵ مطالعه بر اساس داده واقعی

برای یافتن طرح بهینه با استفاده از دو معیار در رویکرد بهینه‌یابی ترکیبی، مجموعه داده‌های معرفی‌شده توسط نلسون [۲۲] (صفحه ۱۰۵، جدول ۱.۶) در نظر گرفته‌شده است. مجموعه داده در نظر گرفته‌شده، داده‌های شکست یک سیال عایق حاصل از ۳۴ کیلوولت می‌باشد. نمونه‌های Type-II PCRD به حجم $CS(n,m) = (۱۹,۸)$ از توزیع وایبول با پارامترهای ($\hat{\beta} = ۰/۵, \hat{\gamma} = ۷/۱۷۹۲۱$) شبیه‌سازی‌شده‌اند. طرح بهینه در مدل Type-II PCRD با استفاده از رویکرد بهینه‌یابی ترکیبی بر اساس دو معیار $\phi_۱(\cdot)$ و $\phi_۲(\cdot)$ به دست آورده شده است. همان‌طور که در جدول ۲ نشان داده‌شده است، مقادیر $E(T_{m:m:n})$، $E(\underline{C}_r\underline{R})$ و $V(\ln(\hat{T}_p))$ برای طرح سانسور بهینه در رویکرد بهینه تک-هدفه با معیارهای $\phi_۱(\cdot)$ و $\phi_۲(\cdot)$ و همچنین طرح سانسور بهینه با رویکرد ترکیبی $\phi_{۱۲}(\cdot)$، محاسبه‌شده است. همان‌طور که از نتایج جدول برمی‌آید رویکرد ترکیبی برای یافتن طرح سانسور بهینه، زمانی که هر دو معیار به‌صورت هم‌زمان مدنظر باشد، مفید و مناسب است. طرح بهینه با استفاده از رویکرد ترکیبی $\phi_{۱۲}(\cdot)$ دارای میانگین زمان و اندازه واریانس کمتری نسبت به طرح بهینه تک-هدفه در معیار $\phi_۱(\cdot)$ و همچنین دارای میانگین هزینه سانسور کمتری نسبت به معیار $\phi_۲(\cdot)$ است.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله رویکرد بهینه‌یابی ترکیبی با ترکیب محدب دو معیار سعی در بهینه کردن هم‌زمان هر دو معیار می‌نماید. این رویکرد برای زمانی که دو معیار دارای روندهای متضاد باشند با استفاده از روش نموداری، بدون محاسبات پیچیده طرح سانسور بهینه را نتیجه می‌دهد. رویکرد بهینه‌یابی ترکیبی در آزمایش‌های طول‌عمر برای بهینه کردن چندین معیار به‌صورت هم‌زمان پیشنهاد می‌گردد. در واقع هزینه سانسور و هزینه مدت‌زمان آزمایش معیارهای بهینگی موردنظر در این مقاله بودند که می‌توان از معیارهای بهینگی دیگر بر اساس ماتریس اطلاع فیشر و یا ترکیبی از چند معیار در رویکرد بهینه‌یابی ترکیبی استفاده کرد. همچنین در مکانیسم سانسور تصادفی وابسته به شرایط آزمایش از تابع ربط‌های دیگر خانواده مدل‌های خطی تعمیم‌یافته از جمله پروبیت، لگ-لگ و ... به‌جای تابع ربط لوجیت می‌توان بهره جست.



شکل ۱: طرح بهینه ترکیبی حاصل از نمودار $\Psi_1(\mathcal{R}_\lambda|\alpha_1)$ و $\Psi_2(\mathcal{R}_\lambda|\alpha_1)$ در مقابل λ، در مدل Type-II PCRD.

جدول ۱: مقایسه بین معیارهای بهینه تک-هدفه $(\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot))$ و معیار بهینه ترکیبی $(\phi_{12}(\cdot))$ در مدل Type-II PCRD.

	طرح بهینه تک-هدفه				طرح بهینه ترکیبی			
	ϕ_1			ϕ_2			ϕ_{12}	
(n,m)	$E(T_m)$	$E(\underline{C}_r\underline{R})$	$V(\ln(\hat{T}_p))$	$E(T_m)$	$E(\underline{C}_r\underline{R})$	$V(\ln(\hat{T}_p))$	$E(T_m)$	$E(\underline{C}_r\underline{R})$	$V(\ln(\hat{T}_p))$
(۳،۶)	۱۷٫۲۰۶۸۲	۳۹٫۶۷۲۰۰	۱٫۳۱۵۷۱	۳٫۵۲۱۷۰	۶۸٫۰۵۶۰۰	۱٫۳۴۴۱۳	۳٫۷۷۳۱۹	۶۵٫۷۴۴۰۰	۱٫۳۳۹۹۰
(۱۰,۶)	۳۵٫۰۵۰۱۲	۷۹٫۷۹۲۰۰	۰٫۷۷۲۵۹	۶٫۳۰۹۳۷	۱۶۹٫۱۸۴۰۰	۰٫۸۰۸۲۴	۷٫۳۸۶۸۵	۱۵۷٫۰۰۰۰۰	۰٫۸۰۳۹۹
(۱۵,۵)	۱۵٫۷۰۱۸۸	۲۳۲٫۲۷۲۰۰	۰٫۹۸۶۵۰	۱٫۳۹۱۴۳	۳۴۵٫۸۸۸۰۰	۱٫۱۵۳۱۴	۲٫۰۸۱۴۷	۳۰۸٫۸۰۸۰۰	۱٫۱۱۳۴۶
(۲۰,۵)	۸٫۶۹۳۰۵	۳۸۶٫۸۸۰۰۰	۱٫۱۸۰۸۱	۰٫۷۷۰۴۴	۵۰۵٫۲۷۲۰۰	۱٫۳۵۱۹۵	۱٫۰۱۵۴۱	۴۶۶٫۸۸۰۰۰	۱٫۳۱۸۶۲

جدول ۲: مقایسه طرح سانسور بهینه ترکیبی داده‌های واقعی با طرح سانسور بهینه تک- هدفه در توزیع وایبول تحت مدل Type-II PCRD.

معیار	λ^*	α_1^*	$\underline{R}^*$	$E(T_{m:m:n})$	$E(\underline{C}_r'\underline{R})$	$V(\ln(\hat{T}_p))$
ϕ_1	-	$-۵/۳$	$\underline{R}_1^* = (۱, ۰, ۱, ۱, ۰ * ۳, ۸)$	۸/۲۷	۲۳۴	۰/۶۳۳۴۹
ϕ_2	-	-۸	$\underline{R}_2^* = (۱, ۱, ۳, ۲, ۰ * ۳, ۴)$	۴/۶۷	۵۱۴	۰/۴۴۷۵۹
ϕ_{12}	۰/۴۳۵	$-۶/۱$	$\underline{R}_\lambda^* = (۱, ۱, ۱, ۰ * ۲, ۲, ۲, ۴)$	۴/۸۵	۳۶۲	۰/۴۷۱۶۸

مراجع

[1] Abo-Eleneen, Z. A. (2007). Fisher information and optimal schemes in progressive Type-II censored samples. *Model Assisted Statistics and Applications*, **2(3)**, 153-163.

[2] Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications. *Springer Science and Business Media*. Boston.

[3] Balakrishnan, N. Burkschat, M. Cramer, E. and Hofmann, G. (2008). Fisher information based progressive censoring plans. *Computational statistics and data analysis*. **53(2)**, 366-380.

[4] Balakrishnan, N. and Han, D. (2007). Optimal progressive Type-II censoring schemes for nonparametric confidence intervals of quantiles. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*. **36(6)**, 1247-1262.

[5] Bhattacharya, R. (2020). Implementation of compound optimal design strategy in censored life-testing experiment. *TEST*, 1-22.

[6] Bhattacharya, R. and Balakrishnan, N. (2022). A MCMC-type simple probabilistic approach for determining optimal progressive censoring schemes. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. 1-10.

[7] Bhattacharya, R. Pradhan B. and Dewanji, A. (2014). Optimum life testing plans in presence of hybrid censoring: a cost function approach. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*. **30(5)**, 519-528.

[8] Bhattacharya, R. Pradhan, B. and Dewanji, A. (2016). On optimum life-testing plans under Type-II progressive censoring scheme using variable neighborhood search algorithm. *Test*, **25(2)**, 309-330.

[9] Bhattacharya, R. Saha, B. N. Farías G. G. and Balakrishnan, N. (2019). Multi-criteria-based optimal life-testing plans under hybrid censoring scheme. *TEST*, 29(2), 1-24.

[10] Burkschat, M. (2008). On optimality of extremal schemes in progressive type II censoring. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **138(6)**, 1647-1659.

[11] Burkschat, M. Cramer, E. and Kamps, U. (2007). Optimality criteria and optimal schemes in progressive censoring. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **36(7)**, 1419-1431.

[12] Burkschat, M. Cramer, E. and Kamps, U. (2006). On optimal schemes in progressive censoring. *Statistics and Probability Letters*, **76(10)**, 1032-1036.

[13] Cook, R. D. and Wong, W. K. (1994). On the equivalence of constrained and compound optimal designs. *Journal of the American Statistical Association*, **89(426)**, 687-692.

[14] Cramer, E. and Ensenbach, M. (2011). Asymptotically optimal progressive censoring plans based on Fisher information. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141(5)**, 1968-1980.

[15] Cramer, E. and Schmiedt, A.B. (2011). Progressively Type-II censored competing risks data from Lomax distributions. *Computational Statistics and Data Analysis*, **55(3)**, 1285-1303.

[16] Ehrgott,M. (2005). *Multicriteria optimization*, Vol. 491, Springer Science and Business Media.

[17] Hassantabar Darzi, F. Eftekhari Mahabadi, S. and Haghighi, F. (2022). Type-II progressive censoring with GLM-based random removal mechanism dependent on the experimental conditions. *Journal of Applied Statistics*, DOI: 10.1080/02664763.2022.2104230.

[18] Imhof, L. and Wong, W. K. (1998). A graphical method for finding maximin efficiency designs. *Biometrics*, **56(1)**, 113-117.

[19] Kundu, D. (2008). Bayesian inference and life testing plan for the Weibull distribution in presence of progressive censoring. *Technometrics*, **50(2)**, 144-154.

[20] Läuter, E. (1976). Optimal multipurpose designs for regression models. *Mathematische Operationsfor schung und Statistik*, **7(1)**, 51-68.

[21] Läuter, E. (1974). Experimental design in a class of models. *Mathematische Operations forschung und Statistik*. **5(4-5)**, 379-398.

[22] Nelson, W. B. (1982). *Applied life data analysis*. Vol. 521, John Wiley and Sons.

[23] Ng, H.K.T. Chan, P.S. and Balakrishnan, N. (2004). Optimal progressive censoring plans for the Weibull distribution. *Technometrics*, **46(4)**, 470-481.

[24] Pradhan, B. and Kundu, D. (2013). Inference and optimal censoring schemes for progressively censored Birnbaum–Saunders distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **143(6)**, 1098-1108.

[25] Pradhan, B. and Kundu, D. (2009). On progressively censored generalized exponential distribution. *Test*, **18(3)**, 497-515.

Compound optimal design approach under Type-II progressive censoring with random removal dependent on the failure distances

Fatemeh Hassantabar Darzi[1], Firoozeh Haghighi[2] and Samaneh Eftekhari Mahabadi [3]

Abstract:

In Type-II progressive censoring, determining the optimal censoring scheme among all those available censoring schemes is an essential practical issue. Multi-objective optimal approach try to find the optimal design by considering multiple objectives simultaneously. In this article, by considering two criteria and using compound optimal approach, the optimal random removal vector is obtained in Type-II progressive censoring design with dependent random removal mechanism based on *logit* link function. The considered dependent random removal mechanism based on the *logit* link function, including tunning parameters which are determined by the experimenter according to the goals of experiment and possible failure distances. These parameters adjust the removal probability in the random removal mechanism in order to reduce the cost and time of experiment. Determining the optimal value of these parameters according to the optimal criterion results in the optimal removal vector. Simulation studies are conducted to evaluate the compound optimal approach and compare the performance of the proposed approach with single-objective optimal design. At the end, the conclusions and few possible further works are presented. **Keywords:** Type-II progressive censoring, Dependent random removal mechanism, Compound optimal approach, Multi-objective optimal design, Expected experiment time, Cost of censoring.

[1] **PhD student, School of Mathematics, Statistics and Computer Science, College of Science, University of Tehran, Tehran, Iran.**

[2] **Associate Professor, School of Mathematics, Statistics and Computer Science, College of Science, University of Tehran, Tehran, Iran.**

[3] **Associate Professor, School of Mathematics, Statistics and Computer Science, College of Science, University of Tehran, Tehran, Iran.**