تعیین مدل بهینه در سیستم صف‌بندی $\{E_r/M/۲, r = ۱, ۲, \cdots\}$

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی[۱]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۰۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۰۸

چکیده:

در این مقاله برای خانواده مدل‌های $\{E_r/M/۲, r = ۱, ۲, \cdots\}$ با زمان‌های بین ورودهای دارای توزیع ارلانگ و زمان‌های سرویس با توزیع نمایی، مدل بهینه تعیین می‌شود. روش انتخاب مدل بهینه به این صورت است که ابتدا تابع هزینه معرفی و سپس شاخصی جدید به‌عنوان شاخص تصمیم‌گیری برحسب تابع هزینه و احتمال پایایی سیستم به نام SER معرفی می‌شود تا بر اساس آن مدل بهینه تعیین شود. مدلی بهینه است که دارای شاخص SER بزرگ‌تری باشد. همچنین برای تشریح روش استفاده‌شده در این مقاله برای تعیین مدل بهینه، از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مثال عددی استفاده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تابع هزینه، احتمال پایایی سیستم، توزیع ارلانگ، شاخص SER، خانواده مدل‌های $\{E_r/M/۲, r = ۱, ۲, \cdots\}$.

۱ مقدمه

مدل‌های صف‌بندی دارای توزیع ارلانگ، سیستم‌های صف‌بندی مهمی در نظریه صف‌بندی هستند که برخی از معیارهای ارزیابی عملکرد آن‌ها مانند پارامتر شدت ترافیک، متوسط تعداد متقاضیان در سیستم وصف و متوسط زمان انتظار در صف و سیستم متقاضیان به روش‌های مختلف آماری توسط چند نویسنده برآورد شده است. برآورد پارامترها و بررسی خواص ریاضی آن‌ها در مدل $M/E_k/۱$ توسط گوپتا [۵] و برآورد زمان انتظار متقاضیان در سیستم صف‌بندی $E_k/M/۱$ توسط فیسچر [۴] صورت گرفته است. تحلیل بیزی پارامترهای مدل‌های $E_r/M/۱$ و $E_r/M/c$ توسط ویپر [۱۴]، تحلیل بیزی پارامترهای مدل‌های $M/E_r/۱$ و $M/H_k/۱$ توسط اینسوا [۷] و برآورد پارامتر شدت ترافیک مدل $M/E_k/۱$ توسط هاریش‌چاندرا و سوبارائو [۱۱] انجام شد. تحقیقی هم در زمینه کنترل کیفیت در مدل $M/E_k/۱$ توسط جاین و دهیانی [۸] صورت گرفته شد. برآورد بیزی پارامترها در مدل $M/E_r/۱$ توسط چادهوری و میتی [۶]، برآورد بیزی پارامترها در انواع مدل‌های صف‌بندی توسط جوس و مانوهاران [۹]، برآورد پارامترها در مدل $M/E_r/۱$ به روش‌های درستنمایی ماکسیمم و بیزی توسط وایدیاناتان و چاندراساخار [۱۳] و برآورد بیزی پارامترها با استفاده از توزیع پیشین دو متغیره توسط دیپچی و جوس [۳] به دست آورده شد. در این مقاله، هدف یافتن مدلی در بین خانواده مدل‌های $\{E_r/M/۲, r = ۱, ۲, \cdots\}$ بر اساس r هست که تابع هزینه کمترین مقدار و احتمال پایایی بیشترین مقدار را بگیرند، چنین مدلی در این مقاله با نماد $E_{r_{Opt}}/M/۲$ نشان داده‌شده و به‌عنوان مدل بهینه معرفی شد؛ بنابراین برای رسیدن به این هدف، ابتدا بر اساس متوسط تعداد متقاضیان در صف و سیستم تابع هزینه معرفی و سپس شاخصی جدید به نام نرخ کارایی سیستم[۲] برحسب تابع هزینه و احتمال پایایی سیستم معرفی شد تا بر اساس آن مدل بهینه تعیین شود. نحوه تعیین مدل بهینه بر اساس شاخص تصمیم‌گیری SER، در بخش ۳ توضیح داده‌شده است. ساختار مقاله به این صورت است. در بخش دوم، ابتدا توزیع ارلانگ و سیستم صف‌بندی $E_r/M/c$ معرفی و بعضی از معیارهای ارزیابی این‌گونه سیستم‌ها ارائه و سپس ویژگی‌های سیستم صف‌بندی $E_r/M/۲$ به دست آورده شدند. در بخش سوم، فرم کلی تابع هزینه و شاخص SER معرفی و نحوه بهینه‌سازی سیستم‌های $E_r/M/۲$ توضیح داده شد. در بخش چهارم با استفاده از تحلیل عددی، مدل بهینه برای سیستم $E_r/M/۲$ تعیین شد.

[۱] گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. (نویسنده مسئول: yagoubzade@pnu.ac.ir)

[2] System efficiency rate (SER)

۲ مفاهیم اولیه

در این بخش توزیع ارلانگ و مدل $E_r/M/2$ به‌طور مختصر معرفی شدند.

۱.۲ توزیع ارلانگ

ساده‌ترین مدل‌های صف‌بندی آن‌هایی هستند که بر اساس متغیر تصادفی نمایی تشکیل‌شده‌اند. خاصیت بی‌حافظه بودن این متغیر تصادفی، تحلیل مدل‌های نمایی را بسیار آسان می‌سازد؛ بنابراین بیشتر مسائل صف‌بندی در چارچوب مدل‌های نمایی فرمول‌بندی می‌شوند. متغیرهای تصادفی مانند مدت‌زمان سرویس و یا زمان بین دو ورود مشتری‌ها در سیستم‌های صف‌بندی از توزیع‌های متنوعی پیروی می‌کنند که توزیع ارلانگ یکی از معروف‌ترین آن‌هاست.

تعریف ۱.۲. *اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به‌صورت*

$$f(x)=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x},\quad x>0,\lambda>0,r\in\{1,2,\cdots\}$$

باشد، در این حالت توزیع X توزیع ارلانگ نام دارد.

در این مقاله، توزیع ارلانگ با تابع چگالی احتمال فوق با نماد $Er(r,\lambda)$ نشان داده‌شده که میانگین و واریانس آن به ترتیب $\frac{r}{\lambda}$ و $\frac{r}{\lambda^2}$ است. در حالت خاص اگر $r=1$ باشد، توزیع ارلانگ به توزیع نمایی تبدیل می‌شود. اگرچه توزیع ارلانگ ازنظر محاسباتی در حد توزیع نمایی نیست، اما در مقایسه با سایر متغیرهای تصادفی به متغیر تصادفی نمایی نزدیک‌تر است و در مواردی با تبدیل آن به متغیرهای تصادفی نمایی از سهولت محاسباتی خاصیت بی‌حافظگی استفاده می‌کند. برای آن‌که بتوان از خاصیت بی‌حافظگی توزیع نمایی استفاده کرد، می‌توان متغیر تصادفی ارلانگ را به چند متغیر تصادفی نمایی تجزیه کرد. به‌عنوان‌مثال متغیر تصادفی ارلانگ با $r=2$ به‌صورت مجموع دو متغیر تصادفی نمایی نوشته می‌شود. مزیت عمده آن نسبت به توزیع نمایی این است که در عمل پدیده‌های تصادفی بسیاری برحسب آن بیان می‌شود ([۱]).

۲.۲ سیستم صف‌بندی $E_r/M/2$

در این سیستم صف‌بندی زمان بین دو ورود متوالی متقاضیان دارای توزیع $E_r(r,r\lambda)$ و با تابع چگالی احتمال

$$f(t|r,\lambda)=\frac{r\lambda}{\Gamma(r)}(r\lambda t)^{r-1}e^{-r\lambda t},\quad t>0,\lambda>0,r\in N$$

و زمان‌های سرویس دارای توزیع نمایی با پارامتر μ است. در این بخش λ، μ و r پارامترهای نامعلوم و بر اساس [۱۰] توزیع پیشین μ توزیع $Gamma(v_1,a)$ با $v_1\in N$ و $a>0$ و توزیع پیشین توأم (λ,r) توزیعی با تابع چگالی

$$f(\lambda,r)\propto\frac{\theta^{r-1}r(r\lambda)^{rv_2-1}e^{-rb\lambda}}{\Gamma(r)^{v_2}},\quad \lambda>0,r\in N,$$

با $\theta,b>0$ و $v_2\in N$ به‌عنوان ثابت‌های معلوم و با شرط $\theta\left(\frac{v_2}{b}\right)^{v_2}<1$ در نظر گرفته می‌شوند. در این مقاله r عدد ثابت مشخصی نیست، بلکه به‌عنوان متغیر تصادفی در نظر گرفته‌شده که با نماد R نشان داده می‌شود. همچنین تابع احتمال R به‌صورت

$$P(R=r)\propto\frac{\Gamma(rv_2)}{\Gamma(r)^{v_2}}\left(\frac{\theta}{b^{v_2}}\right)^{r-1},\quad r\in N$$

به دست آورده می‌شود [۱۴]. با فرض $v_2=1$ و $\theta<b$ توزیع R، هندسی با پارامتر $1-\frac{\theta}{b}$ است که در این مقاله در نظر گرفته می‌شود.

$$P_R(r)=P(R=r)=\left(1-\frac{\theta}{b}\right)\left(\frac{\theta}{b}\right)^{r-1},\quad r=1,2,\cdots.$$

در خانواده مدل‌های صف‌بندی $\{E_r/M/2,r=1,2,\cdots\}$، $\Theta=\frac{\lambda}{2\mu}$ پارامتر شدت ترافیک سیستم نام دارد که تحت شرط $\Theta<1$ پایا است [۷]. ازآنجایی‌که حالت پایایی، ویژگی مهم هر سیستم صف‌بندی هست، اطلاع داشتن مقدار متوسط Θ ضروری به نظر می‌رسد؛ بنابراین بر اساس [۲] متوسط پارامتر شدت ترافیک تحت شرط $\Theta<1$ به ازای $v_1>1$ به‌صورت

$$E(\Theta|\Theta<1)=\frac{av_2}{b(v_1-1)P_\Theta}\sum_{r=1}^{\infty}P_R(r)\phi(r)\qquad(1)$$

با

$$\phi(r)=\sum_{i=0}^{v_1-2}\binom{rv_2+i-1}{i}p_r^{rv_2}(1-p_r)^i$$

هست که در آن $p_r=\frac{rb}{rb+a}$ و

$$P_\Theta=P(\Theta<1)=\sum_{r=1}^{\infty}P_R(r)\sum_{i=0}^{v_1-1}\binom{rv_2+i-1}{i}p_r^{rv_2}(1-p_r)^i$$

است. البته

$$P_{\Theta|\Theta<1}=\sum_{i=0}^{v_1-2}\binom{rv_2+i-1}{i}p_r^{rv_2}(1-p_r)^i.\qquad(2)$$

به‌طورکلی نحوه محاسبه توزیع تعداد افراد موجود در سیستم $E_r/M/c$ در [۲] به‌صورت

$$\pi_n=\begin{cases}1-\rho-c\rho\sum_{j=1}^{c-1}\Pi(j-1)\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{c}\right) & n=0\\ \frac{c\rho}{n}\Pi(n-1) & 1\le n\le c-1\\ \rho\Pi(n-1) & n\ge c\end{cases}\qquad(3)$$

ارائه می‌شود به‌طوری‌که

$$\Pi(n)=\begin{cases}\sum_{i=n}^{c-1}(-1)^{i-n}\binom{i}{n}U_i & n=0,1,\cdots,c-2\\ \\ D\omega^{n-c} & n\geq c-1\end{cases} \qquad (4)$$

و ω ریشه معادله $\omega=G(c\mu(1-\omega))$ بوده که $G(.)$ تبدیل لاپلاس توزیع زمان بین دو ورود متوالی متقاضیان است ($0<\omega<1$). همچنین

$$U_i=DC_i\sum_{j=i+1}^{c}\frac{\binom{c}{j}}{C_j(1-g_j)}\left[\frac{c(1-g_j)-j}{c(1-\omega)-j}\right],0\leq i\leq c-1,$$
$$g_j=G(j\mu),\quad j=1,2,\cdots,c,$$
$$C_j=\begin{cases}1 & j=0\\ \\ \prod_{i=1}^{j}\left(\frac{g_i}{1-g_i}\right) & j=1,\cdots,c,\end{cases}$$
$$D=\left[\frac{1}{1-\omega}+\sum_{j=i+1}^{c}\frac{\binom{c}{j}}{C_j(1-g_j)}\left(\frac{c(1-g_j)-j}{c(1-\omega)-j}\right)\right]^{-1} \qquad (5)$$

هستند.

بنابراین به ازای $c=2$ و با فرض ρ به‌عنوان یافته Θ، رابطه (۳) به رابطه

$$\pi_n=\begin{cases}1-\rho(1+\Pi(0)) & n=0\\ 2\rho\Pi(0) & n=1\\ \rho\Pi(n-1) & n\geq 2\end{cases} \qquad (6)$$

و رابطه (۴) به رابطه

$$\Pi(n)=\begin{cases}U_0-U_1 & n=0\\ \\ D\omega^{n-2} & n\geq 1\end{cases} \qquad (7)$$

تبدیل می‌شوند. از طرفی تبدیل لاپلاس توزیع زمان بین دو ورود متوالی متقاضیان یعنی $E_r(r,r\lambda)$، تابع $G(s)=(r\lambda/(r\lambda+s))^r$ است؛ بنابراین به ازای $c=2$ و با فرض $x=\omega^{\frac{1}{r}}$، از معادله $\omega=G(c\mu(1-\omega))$ رابطه $2\mu x^{r+1}-(r\lambda+2\mu)x+r\lambda=0$ یا $x^{r+1}-(1+r\rho)x+r\rho=0$ حاصل می‌شود. همچنین به ازای $c=2$ از رابطه (۵) روابط

$$g_i=\frac{r\lambda}{r\lambda+i\mu}=\frac{2r\rho}{i+2r\rho},\quad i=1,2$$
$$C_i=\begin{cases}1 & i=0\\ \\ 2(r\rho)^i & i=1,2\end{cases}$$
$$D=\frac{2r\rho\omega(1-\omega)(1-2\omega)}{1-(1+2r\rho)\omega}$$
$$U_0=\frac{(1-\omega)(1-4r\rho\omega)}{1-(1+2r\rho)\omega}$$
$$U_1=2r\rho U_0$$

به دست آورده می‌شوند؛ بنابراین به کمک این روابط، رابطه (۷) به رابطه

$$\Pi(n)=\begin{cases}\frac{(1-2r\rho)(1-\omega)(1-4r\rho\omega)}{1-(1+2r\rho)\omega} & n=0\\ \\ \frac{2r\rho\omega^{n-1}(1-\omega)(1-2\omega)}{1-(1+2r\rho)\omega} & n\geq 1\end{cases} \qquad (8)$$

تبدیل‌شده و با استفاده از روابط (۶) و (۸)، توزیع تعداد متقاضیان در سیستم به‌صورت

$$\pi_0=1-\frac{\rho\{[1-(1+2r\rho)\omega]+(1-2r\rho)(1-\omega)(1-4r\rho\omega)\}}{1-(1+2r\rho)\omega}$$
$$\pi_1=\frac{2\rho(1-2r\rho)(1-\omega)(1-4r\rho\omega)}{1-(1+2r\rho)\omega}$$
$$\pi_n=\frac{2r\rho^2\omega^{n-2}(1-\omega)(1-2\omega)}{1-(1+2r\rho)\omega},\quad n\geq 2 \qquad (9)$$

به دست آورده می‌شود. با استفاده از رابطه (۹) متوسط تعداد متقاضیان در سیستم (L_s) و متوسط تعداد متقاضیان در صف (L_q) به‌صورت

$$L_s=\frac{2\rho[r\rho(1-2\omega)(2-\omega)+(1-\omega)^2(1-2r\rho)(1-4r\rho\omega)]}{(1-\omega)[1-(1+2r\rho)\omega]}$$
$$L_q=\frac{2\rho^2\omega(1-2\omega)}{(1-\omega)[1-(1+2r\rho)\omega]} \qquad (10)$$

و با استفاده از فرمول‌های لیتل، زمان‌های انتظار در صف (W_q) و در سیستم (W_s) به‌صورت

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda},\quad W_s=\frac{L_s}{\lambda}$$

به دست آورده می‌شوند.

۳ تابع هزینه و بهینه‌سازی

در هر سیستم صف‌بندی هدف، کاهش طول صف و زمان انتظار متقاضی است. وقت متقاضی ازنظر اجتماعی-اقتصادی ارزش دارد و

اتلاف آن هزینه محسوب می‌شود. به‌طورکلی در یک سیستم صف‌بندی امید ریاضی کل هزینه‌ها در واحد زمان معیاری برای ارزیابی سیستم هست که هزینه‌ها بستگی به نوع و ماهیت آن دارد. در این مقاله تابع هزینه به‌صورت

$$C(r) = C_1 L_q + C_2(L_s - L_q) \qquad (11)$$

پیشنهاد می‌شود که در آن C_1 و C_2 مقادیر ثابت و

۱. $C_1 L_q$، هزینه اتلاف وقت متقاضیان در صف تعریف می‌شود که میانگین کل این هزینه برابر با هزینه اتلاف وقت هر متقاضی در صف (C_1) در متوسط تعداد متقاضیان در صف یعنی L_q است.

۲. $C_2(L_s - L_q)$، هزینه اتلاف وقت متقاضیان در هنگام دریافت خدمت تعریف می‌شود که میانگین کل این هزینه برابر با هزینه اتلاف وقت هر متقاضی در حال دریافت خدمت (C_2) در متوسط تعداد متقاضیان در حال دریافت خدمت یعنی $(L - L_q)$ است.

هستند ([۱]). با توجه به رابطه (۱۰) رابطه (۱۱) به‌صورت

$$\begin{aligned} C(r) = & \frac{2\rho^2(1-2\omega)\{2rC_1 + \omega[C_2 - (1+r)C_1]\}}{(1-\omega)[1-(1+2r\rho)\omega]} \\ & + C_2 \frac{2\rho(1-\omega)^2(1-2r\rho)(1-4r\rho\omega)}{(1-\omega)[1-(1+2r\rho)\omega]} \end{aligned}$$

نوشته می‌شود.

۱.۳ بهینه‌سازی مدل $E_r/M/2$

در هر سیستم صف‌بندی، حالت پایایی ویژگی مهمی است که تلاش می‌شود شرایطی فراهم گردد تا سیستم در وضعیت پایا قرار گیرد. از طرفی در دنیای امروز هزینه به‌عنوان یکی از مهم‌ترین عوامل تصمیم‌گیری به شمار می‌آید که بهینه کردن آن نقش مهمی در عملکرد مطلوب سیستم‌های صف‌بندی دارد؛ بنابراین سیستمی مدنظر است که هزینه آن کمترین مقدار و احتمال پایایی آن بیشترین مقدار را داشته باشد. به ازای ρ معین، مقادیر تابع هزینه و احتمال پایایی سیستم به ازای r های مختلف محاسبه و سپس مقادیر هزینه و احتمال پایایی نرمال‌سازی می‌شوند. برای نرمال‌سازی هزینه، کوچک‌ترین مقدار هزینه بر هریک از مقادیر آن و برای نرمال‌سازی احتمال پایایی، هریک از مقادیر احتمال پایایی بر بزرگ‌ترین مقدار آن تقسیم می‌شوند. مقادیر نرمال‌سازی شده هزینه با نماد C_{NSC} و مقادیر نرمال‌سازی شده احتمال پایایی با نماد P_{NRSP} نشان داده می‌شود. برای تعیین سیستم بهینه، با در نظر گرفتن هر دو معیار هزینه سیستم و احتمال پایایی نرمال‌سازی شده، شاخص تصمیم‌گیری به‌عنوان نرخ کارایی سیستم به‌صورت

$$SER = w_1 C_{NSC} + w_2 P_{NRSP}, \quad w_1 + w_2 = 1 \qquad (12)$$

پیشنهاد می‌شود که w_1 و w_2 به ترتیب وزن معیارهای هزینه و احتمال پایایی نرمال‌سازی شده هستند. شاخص تصمیم‌گیری SER با هردو معیار نرمال‌سازی شده ذکرشده ارتباط مستقیم دارد، بدین‌صورت که هرچقدر هزینه سیستم پایین‌تر و احتمال پایایی بالاتر باشد، SER مقدار بالاتری می‌شود؛ بنابراین مقداری از r که به ازای آن، شاخص SER بالاترین مقدار شود به‌عنوان r_{Opt} در نظر گرفته‌شده و سیستم مربوط به آن سیستم بهینه نامیده می‌شود.

۴ تحلیل عددی

در این بخش برای خانواده مدل‌های $\{E_r/M/2, r \in N\}$ با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مثال عددی مدل بهینه تعیین می‌شود.

۱.۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو، مدل بهینه تعیین می‌شود. برای رسیدن به این هدف

۱. با توجه به رابطه (۱) مقدار $E(\Theta|\Theta < 1) = 0/014$ محاسبه‌شده که به‌عنوان $\rho = 0/014$ در نظر گرفته می‌شود.

۲. با توجه به ρ یافته شده درگام اول و به ازایr های متفاوت، ریشه مثبت و کوچک‌تر از عدد ۱ رابطه $x^{r+1} - (1+r\rho)x + r\rho = 0$ محاسبه‌شده و سپس به کمک رابطه (۲) احتمال پایایی و با استفاده از رابطه (۱۱) هزینه سیستم بر اساس داده‌های زیر

$$C_1 = 300, C_2 = 250, v_1 = 11, v_2 = 1$$
$$a = 3, b = 6, \theta = 4$$

به دست آورده می‌شوند.

۳. مقادیر یافته شده هزینه و احتمال پایایی سیستم در گام دوم، نرمال‌سازی شده و سپس به کمک رابطه (۱۲)، مقدار SER به ازای $w_1 = 0/4$ و $w_2 = 0/6$ به دست آورده می‌شود.

نتایج مراحل اشاره‌شده، در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱. برآورد تابع هزینه و احتمال پایایی و مقادیر نرمال شده آن‌ها و SER به ازای $\rho = 0.014$

r	x	L_q	L_s	$C(r)$	$P_{\Theta\vert r}$	C_{NSC}	P_{NSRP}	SER
۱	۰٫۰۱۴	۰٫۰۰۰۵۴	۰٫۰۲۷۹۸	۶٫۹۹۶	۰٫۹۹۴۹۲	۰٫۹۷۶۸	۰٫۹۹۴۹۳	۰٫۹۸۷۷
۲	۰٫۰۲۷	۰٫۰۰۱۰۶	۰٫۰۲۷۹۴	۶٫۹۸۵	۰٫۹۹۵۹۸	۰٫۹۷۸۴	۰٫۹۹۵۹۹	۰٫۹۸۸۹
۳	۰٫۰۴۱	۰٫۰۰۱۶۱	۰٫۰۲۷۸۷	۶٫۹۶۸	۰٫۹۹۶۸۲	۰٫۹۸۰۸	۰٫۹۹۷۸۳	۰٫۹۹۱۰
۴	۰٫۰۵۳	۰٫۰۰۲۰۸	۰٫۰۲۷۷۹	۶٫۹۴۸	۰٫۹۹۷۲۵	۰٫۹۸۳۶	۰٫۹۹۷۲۶	۰٫۹۹۱۸
۵	۰٫۰۶۵	۰٫۰۰۲۵۶	۰٫۰۲۷۶۸	۶٫۹۲۳	۰٫۹۹۸۷۲	۰٫۹۸۷۱	۰٫۹۹۸۷۳	۰٫۹۹۴۱
۶	۰٫۰۷۷	۰٫۰۰۳۰۴	۰٫۰۲۷۵۷	۶٫۸۹۴	۰٫۹۹۹۹۱	۰٫۹۹۱۳	۰٫۹۹۹۹۲	۰٫۹۹۶۴
۷	۰٫۱۰۵	۰٫۰۰۴۱۵	۰٫۰۲۷۳۴	۶٫۸۳۴	۰٫۹۹۹۹۹	۱	۱	۱

جدول ۱ تا رسیدن به‌احتمال پایایی حداقل ۰٫۹۹۹۹ بر اساس r ایجادشده هست. بر اساس شاخص SER واضح است که $r_{Opt} = 7$ انتخاب‌شده و مدل بهینه در خانواده سیستم‌های صف‌بندی $\{E_r/M/2, r = 1, 2, \cdots\}$، $E_7/M/2$ تعیین می‌شود. با توجه به رابطه (۹) و با $\rho = 0.014$ و $x = 0.105$، توزیع متقاضیان موجود در سیستم در مدل بهینه $E_7/M/2$ به‌صورت

$$\pi_n = \begin{cases} 0.9749 & n = 0 \\ 0.0221 & n = 1 \\ (0.0022)(0.105)^{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

و معیارهای ارزیابی سیستم به‌صورت

$$L_q = 0.00415, \quad L_s = 0.02734,$$
$$W_s = \frac{0.02734}{\lambda}, \quad W_q = \frac{0.00415}{\lambda}$$

هستند. مقادیر L_q و L_s نشان‌دهنده آن است که به‌طور متوسط، تعداد متقاضیان در صف و سیستم خالی هست که البته مقدار $\pi_0 = 0.9749$ هم بر خالی بودن سیستم در حداقل ۹۷ درصد اوقات دلالت دارد؛ یعنی متقاضی بعد از وارد شدن به سیستم تا اخذ سرویس ، تقریباً مدت‌زمان ناچیزی را سپری می‌کند؛ بنابراین عملکرد سیستم مطلوب بوده است.

۲.۴ مثال عددی

بانکی در شهر رشت که دارای دو دستگاه خودپرداز است، توسط نویسنده در نظر گرفته‌شده و فاصله زمانی بین مراجعین و فاصله زمانی بین سرویس‌شده‌ها (برحسب دقیقه) از ساعت ۸ تا ۱۰ صبح ۱۷ فروردین سال ۱۴۰۲ ثبت‌شده که داده‌ها در جدول ۲ ثبت‌شده است. با استفاده از داده‌های جدول ۲، برآوردهای درستنمایی ماکسیمم و گشتاوری r، λ، μ و ρ به دست آورده شده و در جدول ۳ آورده شده تا در محاسبات بعدی به‌عنوان مقادیر r و ρ در نظر گرفته شوند. به‌کمک مقادیر r و ρ در جدول ۳، ریشه کوچک‌تر از ۱ معادله $x^{r+1} - (1 + r\rho)x + r\rho = 0$ به دست آورده می‌شود. در ادامه با توجه به مقادیر در نظر گرفته‌شده برای a، b، θ، v_1، v_2، C_1، C_2، w_1 و w_2 در بخش ۴.۱، مقادیر احتمال پایایی، هزینه سیستم و شاخص SER (بعد از نرمال‌سازی مقادیر احتمال پایایی و هزینه سیستم) به ترتیب به کمک روابط (۲)، (۱۱) و (۱۲) به دست آورده شده و در جدول ۴ قرار داده‌شده است. با توجه به شاخص SER در جدول ۴ واضح است که روش برآورد گشتاوری با برآورد r و ρ، مدل بهینه‌تری نسبت به روش برآورد درستنمایی ماکسیمم ارائه می‌دهد و این مدل بهینه، $E_1/M/2$ با $\rho = 0.786$ است.

جدول ۲. داده‌های مربوط به مثال بانک در ۱۷ فروردین سال ۱۴۰۲

فاصله زمانی بین ورودی‌ها	۳٫۹۸	۲٫۳۵	۲٫۹۱	۲٫۶۷	۲٫۲۷	۴٫۳۲	۳٫۱۵	۵٫۴۰
	۴٫۷۱	۳٫۴۶	۴٫۸۴	۶٫۵۲	۲٫۱۲	۳٫۰۸	۴٫۳۴	۴٫۱۱
	۴٫۱۷	۲٫۶۸	۳٫۸۲	۳٫۵۰	۳٫۳۲	۳٫۹۷	۴٫۹۵	۵٫۰۰
	۳٫۶۸	۴٫۳۸	۲٫۵۲	۱٫۷۷	۲٫۳۷	۳٫۲۵		
فاصله زمانی بین سرویس‌ها	۳٫۴۴	۰٫۷۳	۱٫۵۰	۰٫۶۳	۰٫۱۱	۰٫۶۴	۳٫۸۶	۲٫۶۲
	۰٫۱۷	۱٫۵۱	۲٫۸۰	۱٫۹۷	۵٫۱۷	۰٫۵۶	۱٫۹۰	۲٫۱۵
	۰٫۴۹	۱۰٫۰۰	۳٫۱۵	۴٫۴۷	۲٫۹۳	۰٫۳۴	۰٫۹۴	۰٫۱۸
	۱٫۸۶	۴٫۲۵	۰٫۱۰	۲٫۹۴	۳٫۱۵	۲٫۱۹		

جدول ۳. برآورد پارامترها برای مثال بانک

روش برآورد	r	λ	μ	ρ
درستنمایی ماکسیمم	۲	۴٫۱۱	۲٫۲۰	۰٫۹۳۴
گشتاورها	۱	۲٫۸۶	۲٫۲۰	۰٫۷۸۶

جدول ۴. برآورد احتمال پایایی، هزینه سیستم و شاخص SER برای مثال بانک

روش برآورد	$P_{\Theta\|r}$	x	$C(r)$	C_{NSC}	P_{NSRP}	SER
درستنمایی ماکسیمم	۰٫۹۹۵۸	۰٫۹۷۷۸	۹۱۶۵	۰٫۵۷۹۳	۱	۰٫۸۳۱۲
گشتاورها	۰٫۹۹۴۹	۰٫۹۷۲۰	۵۳۰۹	۱	۰٫۹۹۹۱	۰٫۹۹۹۵

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از تابع هزینه و احتمال پایایی، شاخصی به نام SER برای تعیین یک سیستم بهینه معرفی شد. با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و به کمک این شاخص، برای خانواده مدل‌های صف‌بندی $\{E_r/M/۲, r = ۱, ۲, \cdots\}$، مدل $E_۲/M/۲$ به‌عنوان مدل بهینه انتخاب شد و توزیع تعداد متقاضیان در سیستم و متوسط تعداد متقاضیان در صف و سیستم و متوسط زمان انتظار هر متقاضی در صف و سیستم برای مدل بهینه ارائه شدند. همچنین به کمک یک مثال عددی و با استفاده از برآورد r و ρ به روش‌های درستنمایی ماکسیمم و گشتاوری و بر اساس داده‌های جدول ۴، مشخص شد که روش برآورد گشتاوری، مدل بهینه‌تری با الگوی $E_۱/M/۲$ با $\rho = ۰٫۷۸۶$ ارائه می‌دهد.

تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله از سردبیر و داوران محترم مجله در ارزیابی مقاله قدردانی و تشکر می‌کند.

مراجع

[۱] مدرس، م؛ و تیموری، ا. (۱۳۹۴). *نظریه صف*، چاپ ششم، مرکز نشر آثار علمی دانشگاه علم و صنعت، تهران.

[2] Allen, A. (1990). *Probability, Statistics and Queueing Theory with Computer Science Applications*, 2nd ed. Academic Press, Boston.

[3] Deepthi, V. and Jose, J. K. (2021). Bayesian Estimation of $M/E_k/1$ Queueing Model using Bivariate Prior, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **40**, 88-105.

[4] Fischer, M. (1974). The Waiting time in the $E_k/M/1$ Queueing System, *Operational Research*, **22**, 898-902.

[5] Gupta, P. L. (1982). Structural Properties and Estimation in $M/E_k/1$ Queue, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **11**, 711-719.

[6] Chowdhury, S. and Maiti, S. (2014). Bayesian Estimation of Traffic Intensity in an $M/E_r/1$ Queueing Model, *Research & Reviews: Journal of Statistics, Special Issue on Recent Statistical Methodologies and Applications*, **1**, 99-106.

[7] Insua, D. R., Wiper, M. and Ruggeri, F. (1998). Bayesian analysis of $M|Er|1$and $M|H_k|1$ queues, *Queueing and System*, **30**, 289-308.

[8] Jain, M. and Dhyani, I. (2011). Control Policy for $M|E_k|1$ Queueing System, *Journal of Statistics and Management Systems*, **4**, 73-82.

[9] Jose, J. K. and Manoharan, M. (2014). Bayesian Estimation of rate Parameters of Queueing Models, *Journal of Probability and Statistical Science*, **12**, 69-76.

[10] Ruggeri, F., Wiper, M. P. and Rios Insua, D. (1996). *Bayesian models for correlation in $M/M/1$ queues*, Quaderno IAMI 96.8. CNR-IAMI, Milano.

[11] Harishchandra, K. and Subba Rao, S. (1998). A note on Statistical Inference about the Traffic Intensity Parameter in $M/Ek/1$ Queue, *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, **50**, 144-148.

[12] Srinivas, V., Subba Rao, S. and Kale, B. K. (2011). Estimation of measures in $M|M|1$ queue, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **40(18)**, 3327-3336.

[13] Vaidyanathan, V. S. and Chandrasekhar, P. (2018). Parametric Estimation of an $M|E_r|1$ Queue, *Opsearch*, doi.org/10.1007/s12597-018-0342-0.

[14] Wiper, M. (1998). Bayesian analysis of $Er/M/1$ and $Er/M/c$ queues, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **69**, 65-79.

Determining the Optimal Model in the Queuing System $E_r/M/2$

Shahram Yaghoobzadeh Shahrastani[1]

Abstract:

In this article, the optimal model is determined for the family of models $\{E_r/M/2, r = 1, 2, \cdots\}$ with interarrival times with Erlang distribution and service times with exponential distribution. The method of choosing the optimal model is that first, a cost function is introduced, and then a new index is introduced according to the cost function and the stationary probability of the system called SER. A model with a larger SER index is optimal. Also, to describe the method used in this article to determinine the optimal model, the Monte Carlo simulation method and numerical example are used.

Keywords: Cost function, Probability of system stationary, Erlang distribution, Index SER, The family of models $\{E_r/M/2, r = 1, 2, \cdots\}$.

[1] **Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran**