

# کران لاندبرگ برای محاسبه احتمالات ورشکستگی و توابع چگالی متغیرهای تصادفی خسارت‌ها

ابوذر بازیاری<sup>۱</sup>

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۶/۱۴

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۰۲

چکیده:

در مدل‌های مخاطره با وجود اطلاع از توزیع آماری متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت، احتمالات ورشکستگی و کران لاندبرگ محاسبه می‌شوند. در این مقاله برای مدل‌های مخاطره جمعی و زمان-گسسته شرکت بیمه با خسارت‌های مستقل و هم‌توزیع و دارای توزیع دم سبک، با استفاده از کران لاندبرگ احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی محاسبه شده و شکل کلی توابع چگالی متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت به دست آمده‌اند. نشان داده می‌شود که برای برخی از حالت‌های خاص در مدل مخاطره زمان-گسسته توابع چگالی اندازه‌های خسارت دارای توزیع هندسی شیفت داده شده و برای مدل مخاطره جمعی همواره دارای توزیع نمایی هستند. ارائه مثال‌های عددی احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی و مقادیر شبیه‌سازی شده این احتمالات و کران لاندبرگ از نتایج پایانی این مقاله می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی، توزیع هندسی شیفت داده شده، توزیع نمایی، کران لاندبرگ، مدل مخاطره

## ۱ مقدمه

از مجموع سرمایه اولیه<sup>۴</sup> و میزان حق بیمه‌ها<sup>۵</sup> زیادتر باشد، شرکت ورشکست می‌شود.

از پیش‌گامان محاسبه مسئله احتمال ورشکستگی در بیمه می‌توان به [۱۸] و [۱۱] اشاره کرد. [۲۰] احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی را برای خسارت‌های دارای توزیع دم سبک<sup>۶</sup> به دست آورد و نیز کران لاندبرگ<sup>۷</sup> را مورد مطالعه قرار داد. [۱۹] کران‌هایی را برای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی محاسبه کردند. [۱] به گردآوری و تحقیق در انواع مدل‌های مخاطره پرداختند. [۷] تقریب‌های مختلفی را برای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی به دست آوردند. [۱۵]، نتایج عددی را برای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی محاسبه کردند. [۱۶] ضمن بررسی دقیق مدل مخاطره زمان-گسسته<sup>۸</sup>، احتمالات ورشکستگی را نیز محاسبه کردند. [۸]، با ثابت بودن حق بیمه در مدل مخاطره جمعی<sup>۹</sup>، تقریب احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را تعیین کردند. [۲۷]،

بیمه بخش قابل توجهی از فعالیت‌های اقتصادی در ایران و جهان را به خود اختصاص داده است. همچنین دیگر فعالیت‌های صنعتی و خدماتی در ارتباط کامل با بخش بیمه هستند؛ بنابراین نقش شرکت‌های بیمه در فعال نگه داشتن این صنعت‌ها بسیار حائز اهمیت است. به رغم وسعت و اهمیت فعالیت‌های بیمه‌ای در ایران، متأسفانه تا به حال توجه کمی به ساختار مدل‌های بیمه از نظر ریاضی و آمار شده است. محاسبه احتمالات ورشکستگی<sup>۲</sup> در نظریه احتمال<sup>۳</sup> بسیار اهمیت دارد و برای به دست آوردن این احتمالات نیاز به استفاده از روش‌های ریاضی و آمار است. البته محاسبه احتمالات ورشکستگی، وابسته به توزیع آماری خسارت‌های رخ داده شده از طرف بیمه‌گذاران می‌باشد. فرض کنید یک شرکت بیمه شروع به سرمایه‌گذاری و فعالیت کند. اگر هزینه‌ای را که این شرکت بابت رخداد خسارت‌های بیمه‌گذاران خود پرداخت می‌کند

<sup>۱</sup> گروه آمار، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر (نویسنده مسئول: ab\_bazyari@pgu.ac.ir)

<sup>۲</sup>Ruin probability

<sup>۳</sup>Probability theory

<sup>۴</sup>Initial capital

<sup>۵</sup>Premium

<sup>۶</sup>Light tailed distribution

<sup>۷</sup>Lundberg bound

<sup>۸</sup>Discrete time risk model

<sup>۹</sup>Collective risk model

چگالی متغیرهای تصادفی خسارت‌ها در مدل مخاطره زمان-گسسته و جمعی به ترتیب توزیع هندسی شیفت داده شده و توزیع نمایی هستند. مثال‌های عددی در بخش چهارم آورده شده‌اند. در پایان بحث و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

## ۲ مدل‌های مخاطره بیمه

در این بخش، ابتدا مفهوم مخاطره در بیمه بیان شده و سپس دو نوع مدل مخاطره‌ی رایج در شرکت بیمه معرفی می‌شوند. در این مدل‌ها فرض بر این است که اندازه‌های خسارت دارای توزیع دم سبک باشند، به عبارت دیگر تابع مولد گشتاور متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت متناهی باشد.

### ۱.۲ مخاطره در شرکت بیمه

با جمع کردن ذخیره اولیه با حق بیمه دریافتی و کم کردن مقدار خسارت‌های رخ داده شده در یک دوره زمانی، بیمه‌گر در هر لحظه از زمان از فرآیند مخاطره آگاهی می‌یابد. چون در هر لحظه از زمان فرآیند مورد بررسی قرار می‌گیرد، بنابراین می‌توان اولین زمانی که فرآیند زیر صفر قرار می‌گیرد را مشاهده کرد که این نشانه‌ای از ورشکستگی شرکت است. زمان ورشکستگی تابعی از سرمایه اولیه و حق بیمه دریافتی می‌باشند.

### ۲.۲ مدل مخاطره زمان-گسسته شرکت بیمه

در مدل مخاطره زمان-گسسته هر خسارتی که از طرف بیمه‌گذار در یک زمان مشخص دریافت می‌شود به‌عنوان یک متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود، بنابراین مجموع خسارت‌ها با جمع کردن تمام خسارت‌های رخ داده شده به دست می‌آید. رابطه ریاضی این مدل مخاطره در زمان  $n$  به صورت

$$U(n) = u + cn - \sum_{i=1}^n X_i, \quad (1)$$

تعریف شده است که در آن،  $u$  سرمایه اولیه شرکت،  $cn$  حق بیمه‌های دریافتی تا زمان  $n$ ، متغیر تصادفی  $X_i$ ،  $i = 1, 2, 3, \dots$ ، اندازه خسارت مربوط به  $i$  امین بیمه‌گذار و به ترتیب با تابع چگالی و تابع توزیع  $f(x)$  و  $F(x)$  و دارای میانگین  $\beta$  بوده، تابع مولد گشتاور و تابع مولد احتمال آن به ترتیب با  $M_X(t)$  و  $\Psi_X(t)$  نشان داده می‌شود. مقدار

ضمن محاسبه احتمال ورشکستگی در مدل مخاطره زمان-گسسته، تابع احتمال کسری ورشکستگی و تابع احتمال مشترک مازاد بلافاصله قبل از ورشکستگی را نیز به دست آوردند.

[۲] احتمال ورشکستگی در مدل مخاطره زمان-گسسته شرکت بیمه با خسارت‌های وابسته را محاسبه کرد. [۳]، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را با فرآیندهای تصادفی و معادلات دیفرانسیل محاسبه و یک فرمول صریح برای تعیین تقریب لاندبرگ در یافتن تقریبی احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برحسب تابع توزیع متغیرهای تصادفی تعداد خسارت‌های بیمه‌گذاران به دست آورد.

[۲۳] احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را برای خسارت‌های با هر توزیع آماری محاسبه کردند. [۱۲] احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و سری‌های فوریه به دست آوردند. [۲۵] از روش بازگشتی برای محاسبه احتمال ورشکستگی استفاده کرده‌اند.

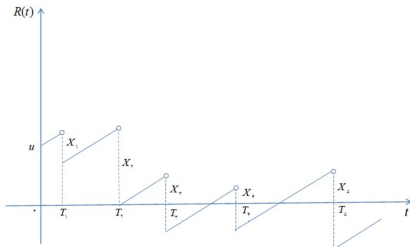
[۲۸] احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را با قانون ضعیف اعداد بزرگ به دست آوردند. [۲۲]، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را در مدل مخاطره زمان-گسسته محاسبه و چند مثال عددی در همین ارتباط ارائه کردند. [۱۴] برآورد احتمال ورشکستگی در مدل مخاطره جمعی را محاسبه و با مثال‌های عددی دقت نتایج را مورد بررسی قرار دادند. [۴] احتمال ورشکستگی را در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت برای سرمایه اولیه و حق بیمه ثابت وقتی که خسارت‌ها دارای توزیع نمایی<sup>۱۰</sup> و فرآیند تعداد خسارت‌ها دارای توزیع پواسون باشند، محاسبه و نتایج برای توزیع‌های لیندلی و نمایی مورد بررسی قرار گرفته است.

در مدل‌های مخاطره بیمه همواره با دانستن توزیع آماری متغیرهای تصادفی خسارت و فرض استقلال بین آن‌ها و زمان‌های رخداد بین خسارت‌ها، احتمالات ورشکستگی و کران لاندبرگ محاسبه می‌شوند (برای حالات وابستگی می‌توان به [۶] رجوع کرد)؛ اما در مقاله حاضر، با اطلاع از کران لاندبرگ یک کلاس کلی از توابع چگالی متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت تعیین و نیز احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی محاسبه می‌شوند.

در بخش دوم به ارائه تعاریف، بیان مدل‌های مخاطره زمان-گسسته و جمعی و نیز کران لاندبرگ پرداخته شده است. در بخش سوم با در نظر گرفتن کران لاندبرگ در مدل‌های مخاطره زمان-گسسته و مخاطره جمعی، فرمول‌های کلی برای توابع چگالی متغیرهای تصادفی خسارت‌ها به دست آمده و سپس احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی محاسبه شده‌اند. همچنین نشان داده می‌شود که در حالات خاص، توابع

<sup>10</sup>Exponential distribution

مدل بندی می شود. در این مدل  $u$  سرمایه اولیه شرکت،  $t \geq 0$  نشان دهنده زمان،  $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$  متغیرهای تصادفی اندازه های خسارت با توزیع دم سبک و  $\{T_k, k = 1, 2, \dots\}$  متغیرهای تصادفی زمان های رخداد بین خسارت ها بوده که از هم مستقل هستند. نمودار مدل مخاطره (۴) در شکل ۲ داده شده است.



شکل ۲. مدل مخاطره زمان-گسسته شرکت بیمه

**تعریف ۱.۰.۲.** تعریف ۱. اگر در مدل مخاطره  $R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$  فرآیند تعداد خسارت ها یعنی  $\{N(t); t \geq 0\}$ ، فرآیند پواسون با پارامتر  $\lambda$  در نظر گرفته شود، مدل مخاطره حاصل را مدل مخاطره کلاسیک یا مدل مخاطره کرامر-لاندربرگ می گویند.

شرکت بیمه به غیر از هزینه هایی که مربوط به پرداخت خسارت های بیمه گذاران خود است، هزینه های دیگری از جمله پرداخت حقوق کارکنان و هزینه های بازاریابی را نیز دارد، برای تأمین این هزینه مبلغی تحت عنوان سربار ایمنی  $\theta$  از بیمه گذاران دریافت می شود.

در مدل مخاطره (۴)، ورشکستگی اتفاق می افتد هرگاه برای کوچک ترین مقدار  $t > 0$ ، همواره  $R(t) < 0$  باشد. اگر احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی با نماد  $\psi(u)$  نشان داده شود، آنگاه:

$$\psi(u) = P(\min_{t \geq 0} R(t) < 0 | R(0) = u), \quad u, t \geq 0, \quad (5)$$

است. احتمال بقا با  $\phi(u) = 1 - \psi(u)$  نشان داده می شود.

فرض کنید  $T_1$  زمان وقوع اولین خسارت و  $X_1$  متغیر تصادفی اولین خسارت باشد، اگر شرط  $E(X_1 - T_1) < 0$  برقرار باشد، آنگاه برای خسارت های مستقل و هم توزیع با توزیع دم سبک برای  $u \geq 0$  همواره نامساوی:

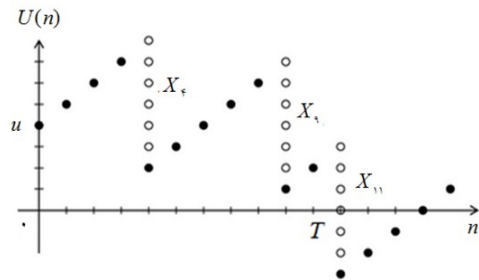
$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad (6)$$

برقرار است که در آن مقدار ثابت مثبت و یکتا بوده و از رابطه  $E(e^{R(X_1 - T_1)}) = 1$  محاسبه می شود (برای اثبات نامساوی داده شده در (۶) به [۱۳] یا [۵] رجوع شود).

بازیاری [۳] ثابت کرد که مشتق احتمال بقا از رابطه

$$\phi'(u) = \lambda \phi(u) - \lambda \int_0^u \phi(u-x) dF(x), \quad (7)$$

فرآیند در زمان صفر برابر با سرمایه اولیه بوده یعنی  $U(0) = u$  است. همچنین  $\sum_{i=1}^n X_i$  مجموع کل خسارت های رخ داده شده تا زمان  $n$  است. در این مدل فرض می شود که خسارت ها متغیرهای تصادفی توأم مستقل بوده، اندازه این خسارت ها از زمان رخداد آن ها مستقل و نیز خسارت ها دارای توزیع دم سبک باشند؛ بنابراین نمودار مدل مخاطره (۱) در شکل ۱ داده شده است. در این شکل،  $T$  زمان ورشکستگی می باشد.



شکل ۱. مدل مخاطره زمان-گسسته شرکت بیمه

برای  $n = 1, 2, \dots$  مدل مخاطره (۱) را می توان به صورت

$$U(n) = U(n-1) + 1 - X_n, \quad (2)$$

نوشت که در آن  $U(0) = u$  است. فرض کنید  $\psi_I(u)$  احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی مدل (۲) باشد، در این صورت برای  $u = 0, 2, \dots$

$$\psi_I(u) = P(\cup_{n=1}^{\infty} (U(n) < 0)), \quad (3)$$

است. اگر برای متغیر تصادفی گسسته و نامنفی خسارت،  $P(X_i > 0) = 1 - q$  و  $P(X_i = 0) = q$  باشد، آنگاه:

$$F(x) = P(X \leq x | X > 0) = \frac{G(y) - G(0)}{p}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

و

$$f(x) = P(X = x | X > 0) = \frac{g(y)}{p}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

می باشد، به طوری که  $Y(x) = (X = x, X > 0)$  یک متغیر تصادفی با تابع چگالی  $g(y)$  و تابع توزیع  $G(y)$  است. یکی از اهداف این مقاله، تعیین فرم های کلی برای تابع چگالی  $f(x)$  در مدل های مخاطره زمان-گسسته و جمعی شرکت بیمه است.

### ۳.۲ مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه

فرآیند مخاطره جمعی شرکت بیمه به صورت

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad (4)$$

برقرار باشد. از طرفی چون  $\psi_I(0) = k$  است، بنابراین بایستی  $k \leq 1$  باشد.

قضیه ۱۰۳. اگر تساوی (۱۴) برقرار باشد، آنگاه تابع چگالی متغیر تصادفی خسارت در مدل مخاطره زمان-گسسته عبارت است از:

$$f(x) = \begin{cases} a & x = 1, \\ (1-a)(1-b)b^{x-2} & x = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad (15)$$

در تساوی (۱۵) مقادیر  $a$  و  $b$  عبارتند از:

$$a = \frac{pw - k(w - q)}{pw(1 - k)}, \quad b = \frac{1 - kw}{w(1 - k)}. \quad (16)$$

اثبات. با شرطی کردن احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی روی مجموع کل خسارت‌های رخ داده‌شده‌ی اولین زمان رخداد، برای  $u = 0, 1, 2, \dots$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \psi_I(u) &= \bar{G}(u+1) + \sum_{x=0}^{u+1} g(x)\psi_I(u+1-x) \\ &= q\psi_I(u+1) + p(\bar{F}(u+1) \\ &\quad + \sum_{x=1}^{u+1} f(x)\psi_I(u+1-x)), \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن  $\bar{F}(u) = 1 - F(u)$  و  $\bar{G}(u) = 1 - G(u)$  می‌باشد. با جایگذاری  $u-1$  به جای  $u$  در رابطه (۱۷) خواهیم داشت:

$$\psi_I(u-1) = q\psi_I(u) + p(\bar{F}(u) + \sum_{x=1}^u f(x)\psi_I(u-x)). \quad (18)$$

با توجه به رابطه (۱۴)، تساوی (۱۸) به صورت

$$kw^{-(u-1)} = qkw^{-u} + p(\bar{F}(u) + \sum_{x=1}^u f(x)\psi_I(u-x)), \quad (19)$$

نوشته می‌شود. با ضرب کردن طرفین تساوی (۱۹) در  $w^u$  داریم:

$$kw = qk + p(\bar{F}(u)w^u + k \sum_{x=1}^u f(x)w^x). \quad (20)$$

اگر  $u = 1$  باشد، آنگاه:

$$f(1) = \frac{pw - k(w - q)}{pw(1 - k)} = a. \quad (21)$$

با جایگذاری  $u-1$  به جای  $u$  در رابطه (۲۰) برای  $u = 2, 3, 4, \dots$  خواهیم داشت:

$$kw = qk + p(\bar{F}(u-1)w^{u-1} + k \sum_{x=1}^{u-1} f(x)w^x). \quad (22)$$

با کم کردن رابطه (۲۲) از (۲۰) و تقسیم کردن عبارت به دست آمده بر  $pw^{u-1}$  برای  $u = 2, 3, 4, \dots$  خواهیم داشت:

$$\bar{F}(u)w - \bar{F}(u-1) + kf(u)w = 0. \quad (23)$$

به دست می‌آید. همچنین برای  $u$  به اندازه کافی بزرگ، تقریب احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی عبارت است از:

$$\phi(u) \frac{1 - \lambda\beta}{\lambda M'_X(R) - 1} e^{-Ru}, \quad (8)$$

که در آن  $M'_X(R)$  مشتق تابع مولد گشتاور متغیر  $X$  در نقطه  $R$  است.

### ۳ تابع چگالی و احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی

در این بخش، به محاسبه توابع چگالی و احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل‌های مخاطره زمان-گسسته و جمعی شرکت بیمه برای اندازه‌های خسارت دارای توزیع دم سبک پرداخته شده است.

#### ۱۰۳ احتمال در مدل مخاطره زمان-گسسته

ابتدا به محاسبه تابع چگالی و احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره (۱) پرداخته می‌شود. چون  $E(e^{R(X_1-1)}) = 1$  بنابراین  $M_X(R) = e^R$ . برای راحتی در یافتن نتایج از تابع مولد احتمال استفاده می‌شود. فرض کنید  $w > 1$  وجود دارد به طوری که

$$\Psi_Y(w) = w, \quad (9)$$

باشد. آنگاه کاملاً بدیهی است که نامساوی (۶) برای مقادیر  $u = 0, 1, \dots$  عبارت است از:

$$\psi_I(u) \leq w^{-u}, \quad (10)$$

همچنین تساوی (۹) برحسب تابع مولد احتمال  $\Psi_X(t)$  به صورت

$$q + p\Psi_X(w) = w \quad (11)$$

نوشته می‌شود. شیو [۲۴] نشان داد که تساوی

$$\psi_I(0) = \frac{p}{q}(\beta - 1), \quad (12)$$

برقرار است. همچنین [۱۷] ثابت کردند که اگر  $u \rightarrow \infty$ ، تقریب احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی عبارت است از:

$$\psi_I(u) \frac{1 - p\beta}{\Psi'_X(w) - 1} w^{-u+1} = \frac{1 - p\beta}{p\Psi'_Y(w) - 1} w^{-u+1}. \quad (13)$$

بنابراین با توجه به تقریب (۱۳)، مقدار ثابت  $k$  وجود دارد که برای  $u = 0, 1, 2, \dots$  تساوی

$$\psi_I(u) = kw^{-u}, \quad (14)$$

### ۲.۳ موارد خاص

(۱) اگر  $a = 1$ ، در این صورت تابع توزیع  $F$  در عدد یک متمرکز خواهد شد و بنابراین مقدار همه خسارت‌ها برابر با یک می‌باشد. لذا با توجه به رابطه (۲۵)،

$$\psi_I(u) = 0, \quad u = 0, 1, 2, \dots,$$

خواهد بود.

(۲) اگر  $b = 0$ ، در این صورت با استفاده از رابطه (۲۵)،

$$\psi_I(u) = \left(\frac{p}{q}(1-a)\right)^{u+1}, \quad u = 0, 1, 2, \dots,$$

احتمال ورشکستگی به دست آمده دقیقاً احتمال ورشکستگی محاسبه شده در [۲۶] است.

(۳) اگر  $a = 1 - b$ ، آنگاه طبق قضیه ۱،

$$f(x) = (1-b)b^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots,$$

می‌باشد. در این صورت احتمال ورشکستگی عبارت است از:

$$\psi_I(u) = \frac{p}{1-b} \left(\frac{b}{q}\right)^{u+1}, \quad u = 0, 1, 2, \dots,$$

و این احتمال در [۲۶] و [۱۰] داده شده است. (۴) فرض کنید  $a = 0$ ، در این صورت طبق قضیه ۱،

$$f(x) = (1-b)b^{x-2}, \quad x = 2, 3, 4, \dots,$$

و احتمال ورشکستگی عبارت است از:

$$\psi_I(u) = \frac{p}{q(1-b)} \left(\frac{p}{q} + b\right)^u, \quad u = 0, 1, 2, \dots$$

احتمال به دست آمده در این حالت نیز در [۹] محاسبه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، برای حالات ۳ و ۴ توابع چگالی به دست آمده دارای توزیع هندسی شیفت داده شده هستند.

### ۳.۳ احتمال در مدل مخاطره جمعی

در این زیربخش برای مدل مخاطره (۲-۴)، تابع چگالی و مقدار احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی محاسبه می‌شود. با توجه به رابطه (۸) مقدار  $k \leq 1$  وجود دارد به طوری که برای  $u \geq 0$  تساوی

$$\psi(u) = ke^{-Ru}, \quad (28)$$

برقرار است.

قضیه ۲.۳. با توجه به تساوی (۲۸)،  $k = \frac{\lambda}{\lambda + R}$  و برای هر  $x > 0$ ،

$$f(x) = \eta e^{-\eta x}, \quad (29)$$

می‌باشد که در آن  $\eta = \frac{R}{1-k}$  است.

با جایگذاری  $u - 1$  به جای  $u$  در رابطه (۲۳) برای  $u = 3, 4, 5, \dots$  خواهیم داشت:

$$\bar{F}(u-1)w - \bar{F}(u-2) + kf(u-1)w = 0.$$

با کم کردن آن از رابطه (۲۳) برای  $u = 3, 4, 5, \dots$  داریم:

$$wf(u) - f(u-1) + kw(f(u-1) - f(u)) = 0,$$

در نتیجه برای  $u = 3, 4, 5, \dots$  تساوی

$$f(u) = \frac{1-kw}{w(k-1)} f(u-1) = bf(u-1),$$

برقرار است؛ بنابراین کاملاً بدیهی است که  $u = 2, 3, 4, \dots$  تساوی

$$f(u) = f(2)b^{u-2}, \quad (24)$$

برقرار است. از طرفی چون  $w(k-1) - (1-kw) = w-1 > 0$ ، بنابراین  $b = \frac{1-kw}{w(k-1)} < 1$  است. با توجه به روابط (۲۱) و (۲۴) خواهیم داشت:

$$1 = \sum_{x=1}^{\infty} f(x) = a + f(2) \sum_{x=2}^{\infty} b^{x-2} = a + \frac{f(2)}{1-b},$$

بنابراین  $f(2) = (1-a)(1-b)$  می‌باشد و به همین ترتیب برای مقادیر  $u = 3, 4, 5, \dots$  مقدار تابع  $f(x)$  در قضیه (۱.۳) به دست می‌آید و قضیه اثبات می‌شود. □

نتیجه ۱. اگر شرایط قضیه (۱.۳) برقرار باشد، آنگاه:

$$\psi_I(u) = \frac{p(1-a)}{q(1-b)} \left(\frac{p}{q}(1-a) + b\right)^u, \quad u = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

نکته: چون  $\beta$  میانگین خسارت‌ها است، با توجه به رابطه (۱۵) داریم:

$$\beta = \sum_{x=1}^{\infty} xf(x) = a + \sum_{x=2}^{\infty} xf(x) = 1 + \frac{1-a}{1-b}. \quad (26)$$

بنابراین  $\frac{1-a}{1-b} = \beta - 1$  است. با جایگذاری آن در رابطه (۲۵) تساوی

$$\psi_I(u) = \frac{p}{q}(\beta - 1) \left(\frac{p}{q}(1-a) + b\right)^u, \quad u = 0, 1, 2, \dots, \quad (27)$$

به دست می‌آید که برای  $u = 0$  دقیقاً فرمول (۱۲) می‌باشد.

### ۴.۳ مثال‌های عددی

اثبات. با استفاده از (۷)، خواهیم داشت:

$$\frac{d}{du} \psi(u) = \lambda(\psi(u) - \bar{F}(u) - \int_0^u \psi(u-x)f(x)dx). \quad (30)$$

با جایگذاری (۲۸) در (۳۰) و ضرب کردن طرفین تساوی در مقدار  $e^{Ru}$  داریم:

$$\bar{F}(u)e^{Ru} = k\left(\frac{R}{\lambda} + 1 - \int_0^u e^{Ru}f(x)dx\right). \quad (31)$$

اگر  $u = 0$  باشد، آنگاه مقدار  $k$  برابر با  $\frac{\lambda}{\lambda+R}$  به دست می‌آید. حال با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۳۱)، تساوی

$$-f(u)e^{Ru} + \bar{F}(u)Re^{Ru} = -kf(u)e^{Ru},$$

به دست می‌آید که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{f(u)}{\bar{F}(u)} = \frac{R}{1-k} = \eta.$$

بنابراین تابع توزیع  $F$  دارای نرخ شکست یا نرخ مخاطره ثابت  $\eta$  بوده و در نتیجه بایستی دارای تابع چگالی نمایی با پارامتر  $\eta$  باشد. □

نتیجه ۲. اگر شرایط قضیه ۲.۳ برقرار باشد، آنگاه احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی عبارت است از:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\eta} e^{-(\eta-\lambda)u}, \quad u \geq 0. \quad (32)$$

با محاسبه مقادیر  $k$ ،  $R$  طبق قضیه ۲.۳ و قرار دادن آن‌ها در (۲۸) به راحتی رابطه (۳۲) به دست می‌آید. لازم به ذکر است چون  $\beta = \frac{1}{\eta}$ ، بنابراین رابطه (۳۲) به صورت

$$\psi(u) = \lambda\beta e^{-(\eta-\lambda)u}, \quad u \geq 0,$$

خواهد بود که اگر  $u = 0$  باشد، دقیقاً با فرمول (۱۰) داده شده در [۳] برابر است.

در این بخش، نتایج به دست آمده با مثال‌های عددی مورد بررسی قرار می‌گیرند. در مثال‌های ۱ و ۲ با وجود اطلاع از تابع احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی مقادیر پارامترها محاسبه و فرم تابع چگالی اندازه‌های خسارت به دست آمده‌اند. در مثال ۳، از روش شبیه‌سازی نیز برای برآورد احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی استفاده شده است. در مثال ۴، برای یک سبد بیمه مخاطره زمان-گسسته با فرضیات اولیه داده شده، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی و کران لاندبرگ همراه با مقادیر عددی آن‌ها محاسبه شده است. مثال ۵، برای یک سبد بیمه مخاطره جمعی به‌عنوان یک مثال واقعی، نیز احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی و کران لاندبرگ به دست آمده‌اند.

مثال ۱. فرض کنید در یک سبد بیمه مخاطره جمعی شرکت، فرآیند  $\{N(t); t \geq 0\}$  دارای توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$  و تابع احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی به صورت

$$\psi(u) = 0.652 e^{-0.327u}, \quad u \geq 0,$$

باشد. در این صورت  $R = 0.327$  و  $k = 0.652$  است؛ بنابراین طبق قضیه ۲.۳،  $\lambda = 0.61265$  و  $\eta = 0.93965$  و نیز متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت دارای تابع چگالی نمایی  $f(x) = 0.93965 e^{-0.93965x}$  هستند.

مثال ۲. فرض کنید در یک سبد بیمه مخاطره جمعی شرکت بیمه، فرآیند  $\{N(t); t \geq 0\}$  دارای توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$ ، سربار ایمنی  $\theta$  و تابع احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی به صورت

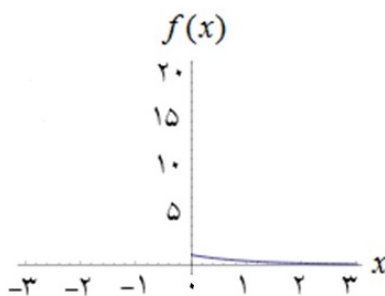
$$\psi(u) = \frac{1}{\theta+1} e^{-Ru}, \quad u \geq 0,$$

باشد که در آن  $R = \frac{\theta}{\theta+1}$ . اگر  $\eta = 1$ ، آنگاه برای  $x > 0$ ،  $f(x) = e^{-x}$  برای مقادیر مختلف سربار ایمنی و پارامتر  $\lambda$ ، کران لاندبرگ و احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی محاسبه و در جدول ۱ آورده شده‌اند.

جدول ۱. کران لاندبرگ، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی و پارامتر  $\lambda$  برای مقادیر مختلف سربار ایمنی

۱۵	۱۰	۵	۲	$\theta$
$e^{-\frac{15}{16}u}$	$e^{-\frac{10}{11}u}$	$e^{-\frac{5}{6}u}$	$e^{-\frac{2}{3}u}$	کران لاندبرگ
$\frac{1}{16}e^{-\frac{15}{16}u}$	$\frac{1}{11}e^{-\frac{10}{11}u}$	$\frac{1}{6}e^{-\frac{5}{6}u}$	$\frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}u}$	احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\lambda$

نمودار تابع چگالی متغیرهای تصادفی خسارت‌ها در شکل ۳ رسم شده است.



شکل ۳. تابع چگالی متغیرهای تصادفی خسارت‌ها

مثال ۳. فرض کنید در یک سبد بیمه مخاطره جمعی شرکت بیمه، فرآیند  $\{N(t); t \geq 0\}$  دارای توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$ ، سربار ایمنی  $\theta$  و تابع احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی به صورت

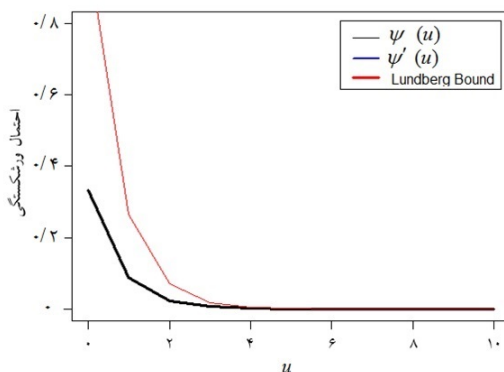
$$\psi(u) = \frac{1}{\theta + 1} e^{-Ru}, \quad u \geq 0, \quad (33)$$

باشد که در آن  $R = \frac{\eta\theta}{\theta + 1}$ . اگر  $\eta = 1$ ، آنگاه تابع چگالی به صورت  $f(x) = 2e^{-2x}$  است. نتایج برای کران لاندبرگ، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی و پارامتر  $\lambda$  برای مقادیر مختلف سربار ایمنی محاسبه و در جدول ۲ داده شده‌اند.

جدول ۲. کران لاندبرگ، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی و پارامتر  $\lambda$  برای مقادیر مختلف سربار ایمنی

۱۵	۱۰	۵	۲	$\theta$
$e^{-\frac{2}{16}u}$	$e^{-\frac{2}{11}u}$	$e^{-\frac{2}{6}u}$	$e^{-\frac{2}{4}u}$	کران لاندبرگ
$\frac{30}{16}e^{-\frac{2}{16}u}$	$\frac{11}{11}e^{-\frac{2}{11}u}$	$\frac{1}{6}e^{-\frac{2}{6}u}$	$\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{4}u}$	احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی
$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\lambda$

با روش شبیه‌سازی می‌توان مقادیر احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی را نیز برای  $\theta$ های مختلف برآورد کرد. برای برآورد کردن  $\psi(u)$ ، مقدار  $\theta = 2$  مقادیر سرمایه اولیه  $u \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$  و تعداد  $N = 10000$  تا مسیر در نظر گرفته شده است. برای هرکدام از مقادیر سرمایه اولیه به تعداد ۱۰۰۰ تا اندازه خسارت از تابع چگالی  $f(x) = 2e^{-2x}$  شبیه‌سازی شده و این کار ۱۰۰۰۰ بار تکرار شده و در نهایت نسبت تعداد دفعاتی که فرآیند مخاطره زیر صفر قرار گرفته، شمارش می‌شوند. نتایج این شبیه‌سازی (احتمالات شبیه‌سازی شده  $\psi(u)$ ) همراه با مقادیر احتمالات رابطه (۳۳) و نیز مقادیر کران لاندبرگ در جدول ۳ داده شده‌اند. همچنین نمودار آن‌ها در شکل ۴ رسم شده‌اند که البته مقادیر احتمالات  $\psi(u)$  و  $\psi'(u)$  به دلیل نزدیکی بر هم منطبق هستند و نیز ملاحظه می‌شود که نمودار کران لاندبرگ در بالای نمودارهای احتمالات ورشکستگی قرار دارد.



شکل ۴. مقادیر احتمالات  $\psi(u)$  و  $\psi'(u)$  و کران لاندبرگ

جدول ۳. مقادیر احتمالات  $\psi(u)$ ،  $\psi'(u)$  و کران لاندبرگ

$u$	$\psi(u)$	$\psi'(u)$	کران لاندبرگ
۰	۰/۳۳۳۳	۰/۳۱۹۵	۱
۱	۰/۸۷۸۶	۰/۰۷۶۳۴	۰/۲۶۳۶
۲	۰/۰۲۳۱۶	۰/۰۲۵۱۹	۰/۰۶۹۴۸
۳	۰/۰۰۰۶۱۰	۰/۰۰۵۷۳	۰/۰۱۸۳۱
۴	۰/۰۰۰۱۶۱	۰/۰۰۰۱۲۵	۰/۰۰۴۸۲۸
۵	۰/۰۰۰۰۴۲۴	۰/۰۰۰۰۵۶۹	۰/۰۰۱۲۷۳
۶	۰/۰۰۰۰۱۱۱	۰/۰۰۰۰۱۰۰	۰/۰۰۰۰۳۳۵
۷	۰/۰۰۰۰۰۲۹۴	۰/۰۰۰۰۰۲۰۳	۰/۰۰۰۰۰۸۸
۸	۰/۰۰۰۰۰۰۷۷	۰/۰۰۰۰۰۰۶۴	۰/۰۰۰۰۰۲۳۳
۹	۰/۰۰۰۰۰۰۲۰۵	۰/۰۰۰۰۰۰۱۹۷	۰/۰۰۰۰۰۰۶۱۴
۱۰	$۵/۳۹۸۶۶۶e - ۷$	$۴/۲۱۴۴۸۵e - ۷$	۰/۰۰۰۰۰۰۱۶۲

ملاحظه می‌شود که با افزایش سرمایه اولیه، مقادیر شبیه‌سازی شده احتمالات ورشکستگی و نیز مقادیر احتمالات رابطه (۴-۱) کاهش می‌یابد و به سمت صفر میل می‌کنند و البته کاملاً بدهی است که کران لاندبرگ نیز در حال کاهش است. مثال ۴. فرض کنید در یک سبد بیمه مخاطره زمان-گسسته،  $P(X > ۰) = \frac{1}{2}$  و برای متغیرهای تصادفی خسارت‌ها  $w = 3, k = \frac{1}{2}$  باشد. آنگاه با توجه به رابطه (۱۶) به راحتی دیده می‌شود که  $a = \frac{1}{2}$  و

با استفاده از نتیجه ۱، برای  $u = 0, 1, 2, \dots$  احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی  $\psi_I(u) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^u$  و نیز کران لاندبرگ  $\psi_I(u) \leq 3^{-u}$  می‌باشد. نتایج عددی برای کران لاندبرگ و احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی برای مقادیر سرمایه اولیه محاسبه و در جدول ۴ داده شده‌اند. ملاحظه می‌شود که برای هر مقدار سرمایه اولیه، مقادیر احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی از کران لاندبرگ کوچک‌تر هستند.

جدول ۴. کران لاندبرگ و احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی

$u$	۰	۱	۲	۵	۱۰
کران لاندبرگ	۱	۰/۳۳۳۳	۰/۱۱۱۱	۰/۰۰۴۱۱	۰/۰۰۰۰۱۷
احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی	۰/۵	۰/۱۶۶۶	۰/۰۵۵۵	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۰۰۰۸

مثال ۵. به عنوان یک مثال کاربردی، مثال ۳ داده شده در [۳] که مربوط به شرکت بیمه‌ای است که کامیون‌های بارکش یک تنی ۶ شرکت باربری را بیمه کرده، در نظر بگیرید. احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی  $R = ۰/۰۰۰۰۳۲۶$  است. در این صورت  $\psi(u) = ۰/۸۶۹۵e^{-۰/۰۰۰۰۳۲۶u}$  و  $k = ۰/۸۶۹۵$  و بنا به قضیه ۲.۳،  $\eta = ۰/۰۰۲۴۹۹$  و  $\lambda = ۰/۰۰۲۱۷۲$  است. آنگاه تابع چگالی متغیر تصادفی اندازه‌های خسارت دارای فرم نمایی  $f(x) = ۰/۰۰۲۴۹۹e^{-۰/۰۰۲۴۹۹x}$  می‌باشد. مقادیر احتمالات ورشکستگی برای سرمایه‌های اولیه مختلف توسط [۳] محاسبه شده و

دیده می‌شود که برای مقادیر بزرگ سرمایه اولیه، احتمال ورشکستگی به صفر نزدیک می‌شود. در اینجا نتایج عددی برای کران لاندبرگ و احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی برای برخی دیگر از مقادیر سرمایه اولیه محاسبه و در جدول ۵ گزارش شده‌اند. مجدداً ملاحظه می‌شود که برای هر مقدار سرمایه اولیه، احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی از کران لاندبرگ کوچک‌تر هستند. البته با افزایش سرمایه اولیه، مقادیر احتمال ورشکستگی و کران لاندبرگ هر دو به صفر نزدیک‌تر می‌شوند.

جدول ۵. کران لاندبرگ و احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی

$u$	۰	۱	۲	۵	۱۰
کران لاندبرگ	۱	۰/۹۹۹۶۷	۰/۹۹۹۳۴	۰/۹۹۹۰۲	۰/۹۹۶۷۴
احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی	۰/۸۶۹۵	۰/۸۶۹۲۱	۰/۸۶۸۹۳	۰/۸۶۸۶۵	۰/۸۶۶۶۷



## ۴ بحث و نتیجه‌گیری

که نمودار کران لاندبرگ در بالای نمودارهای احتمالات ورشکستگی قرار دارد. همچنین در مثال‌های ۴ و ۵ دیده شد که مقادیر احتمالات ورشکستگی از مقادیر کران لاندبرگ کوچک‌تر هستند.

شرط محاسبه کران لاندبرگ در مدل‌های مخاطره، استقلال بین متغیرهای تصادفی خسارت‌ها و زمان رخداد آن‌ها و نیز وجود خسارت‌های دارای توزیع دم سبک است. در مقاله حاضر، با وجود مشخص بودن کران لاندبرگ، ابتدا تابع چگالی متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت در هر دو مدل مخاطره زمان-گسسته و جمعی تعیین و سپس احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی محاسبه شدند. با مثال‌های عددی، کران لاندبرگ، مقادیر احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی و نیز مقادیر شبیه‌سازی‌شده احتمالات ورشکستگی برای مقادیر مختلف سربار ایمنی محاسبه شد. نتایج مثال ۳ نشان می‌دهد

## ۵ تقدیر و تشکر

نویسنده‌ی مقاله از سردبیر محترم نشریه اندیشه آماری و داوران محترم به خاطر مطالعه دقیق مقاله و ارائه نظرات ارزشمندشان در پیشرفت کمی و کیفی آن، کمال تشکر و قدردانی را دارد.

## مراجع

- [۱] بازیاری، ا؛ و پرهام، غ. ع. (۱۳۸۷)، پیدایش فرآیندهای مخاطره و بررسی مدل‌های مربوط به آن برای محاسبه احتمالات ورشکستگی، نهمین کنفرانس آمار ایران، مجموعه مقالات منتخب، ۴۶-۶۱، دانشگاه اصفهان.
- [۲] بازیاری، ا، (۱۳۹۱)، احتمال ورشکستگی فرآیند مخاطره انفرادی شرکت بیمه با خسارت‌های وابسته، مجله علوم آماری، (۱) ۶، ۳۷-۲۱.
- [۳] بازیاری، ا، (۱۳۹۶)، تحلیل احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره جمعی، مجله علوم آماری، (۱) ۱۱، ۳۶-۱۷.
- [۴] بازیاری، ا؛ و علیزاده، م. (۱۴۰۱)، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره بیمه اتکایی مازاد خسارت، مجله علوم آماری، (۱) ۱۶، ۶۲-۴۱.
- [5] Asmussen, S., and Albrecher, H. (2010), *Ruin Probabilities*, Hackensack: World Scientific.
- [6] Bazyari, A., and Roozegar, R. (2019), Finite time ruin probability and structural density properties in the presence of dependence in insurance risk model, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **48(5)**, 1284–1304.
- [7] Burnecki, K., Mista, P. and Weron, A. (2005), What is the best approximation of ruin probability in infinite time?, *Applicationes Mathematicae*, **32(2)**, 155–176.
- [8] Choi, S. K., Choi, M. H., Lee, H. S., and Lee, E. Y. (2010), New approximations of ruin probability in a risk process, *Quality Technology and Quantitative Management*, **7(4)**, 377–383.
- [9] Cosset, H., Landriault, D., and Marceau, E. (2004), Exact expressions and upper bounds for ruin probabilities in the compound Markov binomial model, *Insurance: Mathematics and Economics*, **24**, 449–466.
- [10] Dickson, D. C. M. (1994), Some comments on the compound binomial model, *ASTIN Bulletin*, **24**, 33–44.
- [11] Cramer, H. (1930), *On the Mathematical Theory of Risk*, Skandia Jubilee Volume, Stockholm.
- [12] Dong, X. T., Huy, T. N., and Kirane, M. (2018), Regularization and error estimate of infinite time ruin probabilities for Cramer–Lundberg model, *Mathematical methods in applied sciences*, **41(10)**, 3820–3831.
- [13] Embrechts, P., and Veraverbeke, N. (1982), Estimates for probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims, *Insurance: Mathematics and Economics*, **1**, 55–72.

- [14] Huang, Y., Li, J., Liu, H., and Yu, W. (2021), Estimating ruin probability in an insurance risk model with stochastic premium income based on the CFS method, *Mathematics*, **9**, 982.
- [15] Kasozi, J., and Paulsen, J. (2005), Numerical ultimate ruin probabilities under interest force, *Journal of Mathematics and Statistics*, **1(3)**, 246–251.
- [16] Li, S., Lu, Y., and Garrido, J. (2009), A review of discrete-time risk models, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, **103(2)**, 321–337.
- [17] Liu, G., Wang, Y., and Zhang, B. (2005), Ruin probability in the continuous time compound binomial model, *Insurance: Mathematics and Economics*, **36**, 303–316.
- [18] Lundberg, F. (1903), *I. Approximerad Framställning av Sannohkhetfunktioner. II. Aterforsakering av Kollektivrisiker*, Almqvist and Wiksell, Uppsala.
- [19] Muller, A., and Pflug, G. (2001), Asymptotic ruin probability for risk processes with dependent increment, *Insurance: Mathematics and Economics*, **28(3)**, 381–392.
- [20] Nyrhinen, H. (1999), Large deviations for the time of ruin, *Journal of Applied Probability*, **36(3)**, 733–764.
- [21] Rolski, T. (2000), *Some Problems in the Theory of Risk*, Tokyo Institute of Technology and University of Wrocław.
- [22] Santana, D.J., and Rincón, L. (2020), Approximations of the ruin probability in a discrete time risk model, *Modern Stochastics: Theory and Applications*, **7(3)**, 221–243.
- [23] Santana, D., González, J., and Rincón, L. (2017), Approximations of the ultimate ruin probability in a risk process using Erlang mixtures, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **19(3)**, 775–798.
- [24] Shiu, E. (1989), The probability of eventual ruin in the compound binomial model, *ASTIN Bulletin*, **19**, 179–190.
- [25] Wat, K. P., Yuen, K. C., Li, W. K., and Wu, X. (2018), On the compound binomial risk model with delayed claims and randomized dividends, *Risks, MDPI*, **6(1)**, 1–13.
- [26] Willmot, G. E., (1993), Ruin probabilities in the compound binomial models, *Insurance: Mathematics and Economics*, **12**, 132–142.
- [27] Yuen, K. C., Li, J., and Wu, R. (2013), On a discrete-time risk model with delayed claims and dividends, *Financial Derivatives and Risk Models*, **4(1)**, 3–16.
- [28] Yuen, F. L., Lee, W.Y., and Fung, D. W. H. (2020), A cyclic approach on classical ruin model, *Insurance: Mathematics and Economics*, **91**, 104–110.

## Lundberg Bound for Computing the Ruin Probabilities and Density Functions of Claim Sizes Random Variables

Abouzar Bazyari<sup>1</sup>

Abstract:

In risk models, the ruin probabilities and Lundberg bound are calculated despite knowing the statistical distribution of random variables. In the present paper, for collective risk model and discrete time risk model of insurance company for independent and identically distributed claims with light-tailed distribution, the infinite time ruin probabilities are computed using Lundberg bound, moreover the general forms of density functions of random variables of claim sizes are derived. For some special cases in the discrete time risk model, the density functions of claim sizes have the shifted geometric distribution, and for the collective risk model, they always have an exponential distribution. Presenting the numerical examples of infinite time ruin probabilities and the simulated values of these probabilities and the Lundberg bound are the final results of this article.

**Keywords:** Exponential distribution, Infinite time ruin probability, Lundberg bound, Risk model, Shifted geometric distribution.

---

<sup>1</sup> Department of Statistics, Faculty of Intelligent Systems Engineering and Data Science, Persian Gulf University, Bushehr, Iran