متغیرهای تصادفی توأم فازی وابسته بر اساس α-بدبینانه

بنیتا دولت‌زاده[۱]، ایوب شیخی[۲] ، ماشاالله ماشین‌چی[۳]، علیرضا عرب‌پور[۴]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۱۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۲۴

چکیده:
در این مقاله ابتدا مفاهیم موردنیاز برای متغیر تصادفی فازی را بیان کرده و به مطالعه‌ی متغیر تصادفی فازی و تابع توزیع تجمعی آن را پرداخته و این مفاهیم با استفاده از α-بدبینانه مطرح‌شده‌اند. سپس تمام این مفاهیم برای متغیر تصادفی فازی توأم و تابع توزیع تجمعی آن‌ها بیان می‌شوند. حال چون مفهوم مفصل و کاربرد آن در ساخت تابع توزیع تجمعی توأم استفاده می‌شود، بدین منظورکاربرد مفصل را در ساخت تابع توزیع تجمعی توأم دو متغیر تصادفی فازی ارائه‌شده است. درنهایت، جهت درک بهتر مفهوم مفصل، مثالی را برای این مطلب بیان می‌کنیم.
واژه‌های کلیدی: متغیر تصادفی فازی، α -بدبینانه، تابع قابلیت تغییرپذیری، تابع توزیع تجمعی فازی توأم، مفصل

۱ پیشگفتار

در سال‌های اخیر مطالعات زیادی در زمینه دانش آماری فازی صورت گرفته است که بسیاری از آن‌ها به بحث پیرامون متغیرهای فازی پرداخته‌اند. به‌عنوان‌مثال حسامیان و چاچی (۲۰۱۵) مطالعه متغیرهای تصادفی فازی به روش کلموگروف-اسمیرنوف به بیان مفهوم متغیر تصادفی فازی و یکسری مفاهیم مربوط به آن‌ها، مانند α-برش‌ها[۵] و α-بدبینانه‌ها[۶] پرداخته‌اند. از طرف دیگر رنجبر و حسامیان (۲۰۱۷) برای مطالعه‌ی تابع مفصل متغیرهای تصادفی فازی نیازمند تعریف همین مفاهیم بوده‌اند. پرچمی (۱۳۹۸) نیز در مقاله‌ی خود اشاره‌ای به متغیر تصادفی فازی داشته است. همچنین در بسیاری از مقالات، پس از بیان متغیر تصادفی فازی، از مفاهیمی همچون α-برش، تابع قابلیت تغییرپذیری و α-بدبینانه متغیر تصادفی فازی استفاده‌شده است که حسامیان و همکارانش (۲۰۱۵ و ۲۰۱۷) در بخش‌هایی از مقالات خود از آن‌ها استفاده کرده‌اند. از طرفی لی[۷] (۲۰۱۳) در مقاله خود برای بیان نظریه قطعیت به تعریف تابع قابلیت تغییرپذیری پرداخته است. همچنین پنگ[۸] و لیو[۹] (۲۰۰۴) به بیان برخی از خواص مقادیر خوش‌بینانه و بدبینانه داده‌های فازی از تعریف α-بدبینانه استفاده کردند.

۲ متغیرهای تصادفی فازی

در این بخش به بیان متغیر تصادفی فازی پرداخته و سپس با توجه به تابع عضویت این متغیر تصادفی فازی، می‌توان با این متغیر همانند مجموعه فازی رفتارکرد و تمام مفاهیم مطرح‌شده برای مجموعه فازی را برای متغیر تصادفی فازی نیز بیان خواهیم نمود. لازم به ذکر است که در این مقاله مجموعه‌های Ω، Ω_1 و Ω_2 به معنی فضای نمونه‌ی یک آزمایش در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۱.۲. *مجموعه‌ی $\tilde{A}$ را مجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی مرجع U*

۱ دانشجوی دکتری، بخش آمار، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲ دانشیار، بخش آمار، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان (نویسنده مسئول sheikhy.a@uk.ac.ir)
۳ استاد، بخش آمار، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان
۴ دانشیار، بخش آمار، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان

[5] α-cut
[6] α-pessimistic
[7] Li
[8] Peng
[9] Liu

می‌نامند که توسط تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}} : U \to [0,1]$ که برای هر $u \in U$ درجه‌ی عضویت آن به‌صورت $0 < \mu_{\tilde{A}} < 1$ می‌باشد [۹].

تعریف ۲.۲. فرض $\tilde{A} : U \to [0,1]$ یک مجموعه‌ی فازی باشد. برای هر $\alpha \in (0,1]$ مجموعه‌ی $\tilde{A}[\alpha] = \{u \in U : \mu_{\tilde{A}}(u) \geq \alpha\}$ و $\tilde{A}[0]$ مجموعه‌ای به‌صورت $\tilde{A}[0] = \{u \in U : \mu_{\tilde{A}}(u) \geq 0\}$ می‌باشد. به‌عبارت‌دیگر $\tilde{A}[0] = supp(\tilde{A}) = \lim_{\alpha \to 0^+} \tilde{A}[\alpha]$ می‌باشد. مجموعه‌ی $\tilde{A}[\alpha]$ را α-برش $\tilde{A}$ می‌نامند [۹].

تعریف ۳.۲. عدد فازی $\tilde{A}$ روی $\mathbb{R}$ را یک عدد فازی می‌نامند اگر برای هر $\alpha \in [0,1]$، مجموعه‌ی $\tilde{A}[\alpha]$ یک بازه‌ی ناتهی باشد و $\mu_{\tilde{A}}(a)$ برای هر $u \in \mathbb{R}$ پیوسته باشد و یک عضو یکتا مانند $a^* \in R$ وجود داشته باشد که $\mu_{\tilde{A}}(a^*) = 1$ باشد.

تعریف ۴.۲. عدد فازی $\tilde{A}$ را با تابع عضویت

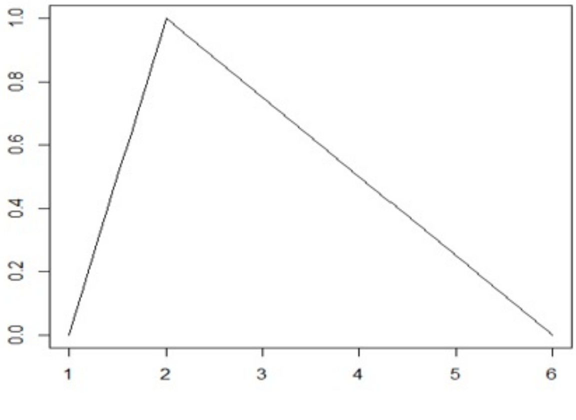
$$\mu_{\tilde{A}}(a) = \begin{cases} L\left(\frac{\lambda - a}{l}\right) & ; \quad a \leq \lambda \\ R\left(\frac{a - \lambda}{r}\right) & ; \quad a > \lambda \end{cases}$$

یک عدد فازی LR می‌نامند و آن را با نماد $\tilde{A} = (l, \lambda, r)_{LR}$ نمایش می‌دهند که در آن $\lambda \in \mathbb{R}$، $L : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to [0,1]$ و R توابعی غیرصعودی و $l, r > 0$. همچنین عدد λ را مقدار نما یا میانه و اعداد l و r را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست $\tilde{A}$ می‌نامند (پرچمی (۱۳۹۸)).

مثال ۵.۲. فرض کنید تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A}$ به‌صورت زیر باشد

$$\mu_{\tilde{A}} = \begin{cases} a - 1 & ; \quad 1 < a \leq 2 \\ \frac{4 - a}{2} & ; \quad 2 < a < 4 \end{cases}$$

شکل این عدد فازی $\tilde{A}$ به‌صورت زیر است



شکل ۱: عدد فازی مثلثی

تعریف ۶.۲. فضای پیشامد $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}, \mathcal{A})$ را در نظر بگیرید که در آن $\mathcal{P}$ اندازه‌ی احتمال روی $\mathbb{R}^n$ و $\mathcal{A}$ سیگما میدانی از مجموعه‌های بورل روی $\mathbb{R}^n$ است. پیشامد فازی روی $\mathbb{R}^n$ یک زیرمجموعه‌ی فازی $\tilde{x}$ در $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌شود به‌طوری‌که تابع عضویت $\mu_{\tilde{x}}$ روی فضای بورل اندازه‌پذیر باشد [۵].

تعریف ۷.۲. تابع $\tilde{X} : \Omega \to \mathcal{F}_{LR}(\mathbb{R})$ با ضابطه‌ی

$$\forall \omega \in \Omega \quad ; \quad \tilde{X}(\omega) = \tilde{X}_\omega \in \mathcal{F}_{LR}(\mathbb{R})$$

را یک متغیر تصادفی فازی می‌گوییم که در آن

$$\mathcal{F}_{LR}(\mathbb{R}) = \left\{ \tilde{X}_\omega : \tilde{X}_\omega = \mu_{\tilde{X}_\omega} = (\lambda, l, r)_{LR} : \mathbb{R} \to [0,1]; \omega \in \Omega \right\}$$

است و منظور از $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌باشد.

تعریف ۸.۲. با توجه به اینکه X یک متغیر تصادفی فازی است، بنابراین α-برش‌های آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{X}_\omega[\alpha] = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{X}_\omega}(x) \geq \alpha \quad ; \quad \alpha \in [0,1]\}$$

از طرفی می‌توان α-برش را برای $\tilde{X}_\omega$ به ازای هر $\omega \in \Omega$ به صورتی دیگر نیز بیان کرد [۶]

$$\tilde{X}_\omega[\alpha] = \left[\left(\tilde{X}_\omega\right)^L_\alpha, \left(\tilde{X}_\omega\right)^U_\alpha \right] \tag{1}$$

که در آن

$$\left(\tilde{X}_\omega\right)^L_\alpha = inf \left\{ x \in \mathbb{R} : x \in \tilde{X}_\omega[\alpha]; \alpha \in (0,1] \right\}$$

و

$$\left(\tilde{X}_\omega\right)^U_\alpha = sup \left\{ x \in \mathbb{R} : x \in \tilde{X}_\omega[\alpha]; \alpha \in (0,1] \right\}$$

است.

لم ۹.۲. در تعریف ۴.۲، به ازای هر $\alpha \in (0,1]$، α-برش برای $\tilde{X}_\omega$ برابر است با:

$$\forall \omega \in \Omega, \alpha \in (0,1] \quad ; \quad \tilde{X}_\omega[\alpha] = \left[\lambda - lL^{-1}(\alpha), \lambda + rR^{-1}(\alpha)\right]$$

اثبات. با توجه به تابع عضویت ذکرشده در تعریف ۴.۲ می‌توان گفت

$$L\left(\frac{\lambda - x}{l}\right) \geq \alpha \Rightarrow \frac{\lambda - x}{l} \leq L^{-1}(\alpha) \Rightarrow \lambda - lL^{-1}(\alpha) \leq x$$

و

$$R\left(\frac{x - \lambda}{r}\right) \geq \alpha \Rightarrow \frac{\lambda - x}{l} \leq R^{-1}(\alpha) \Rightarrow x \leq \lambda + rR^{-1}(\alpha)$$

بنابراین $\lambda - lL^{-1}(\alpha) \leq x \leq \lambda + rR^{-1}(\alpha)$ و در نتیجه اثبات قضیه تمام شد. □

تعریف ۱۰.۲. *C تابع قابلیت تغییرپذیری $\tilde{X}_\omega$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۶] و [۷]*

$$C\{\tilde{X}_\omega \leq x\} = \frac{Sup_{y\leq x}\mu_{\tilde{X}_\omega}(y) - Sup_{y\geq x}\mu_{\tilde{X}_\omega}(y) + ۱}{۲}$$

که می‌توان آن را به‌صورت زیر نیز بیان کرد

$$C\{\tilde{X}_\omega \leq x\} = \begin{cases} \frac{\mu_{\tilde{X}_\omega}(x)}{۲} & ; \quad x \leq \lambda \\ ۱ - \frac{\mu_{\tilde{X}_\omega}(x)}{۲} & ; \quad x > \lambda \end{cases} \qquad (۲)$$

که در آن $x, \lambda \in \mathbb{R}$ هستند [۶].

تعریف ۱۱.۲. *اگر C تابع قابلیت تغییرپذیری $\tilde{X}_\omega$ مطابق با تعریف ۱۰.۲ باشد، آنگاه مقدار α-بدبینانه برای $\tilde{X}_\omega$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۶]*

$$\left(\tilde{X}_\omega\right)_\alpha = inf\left\{x \in \tilde{X}_\omega[۰] : C\{\tilde{X}_\omega \leq x\} \geq \alpha\right\}.$$

قضیهٔ ۱۲.۲. *اگر $\tilde{X}_\omega$ مطابق با تعریف ۴.۲ و C تابع قابلیت تغییرپذیری ذکرشده در تعریف ۱۰.۲ باشد، آنگاه مقدار α-بدبینانه برای $\tilde{X}_\omega$ به ازای هر $\omega \in \Omega$ به‌صورت زیر است*

$$\left(\tilde{X}_\omega\right)_\alpha = \begin{cases} \lambda - lL^{-۱}(۲\alpha) & ; \quad \alpha \in (۰, ۰/۵] \\ \lambda + rR^{-۱}(۲(۱-\alpha)) & ; \quad \alpha \in [۰/۵, ۱] \end{cases}$$

اثبات. با توجه به رابطه (۲) و C در تعریف ۱۰.۲ و تابع عضویت ذکرشده در تعریف ۴.۲، می‌توان نوشت

$$C\{\tilde{X}_\omega \leq x\} = \begin{cases} \frac{۱}{۲}L\left(\frac{\lambda - x}{l}\right) & ; \quad x \leq \lambda \\ ۱ - \frac{۱}{۲}R\left(\frac{x-\lambda}{r}\right) & ; \quad x > \lambda \end{cases} \qquad (۳)$$

که در آن $x, \lambda \in \mathbb{R}$ است. اکنون با توجه به تعریف ۱۱.۲ و رابطه‌ی (۳) برای $\alpha \in (۰, ۰/۵]$ داریم

$$\begin{aligned} \left(\tilde{X}_\omega\right)_\alpha &= inf\left\{x \in \tilde{X}_\omega[۰] : \frac{۱}{۲}L\left(\frac{\lambda - x}{l}\right) \geq \alpha\right\} \\ &= inf\left\{x \in \tilde{X}_\omega[۰] : x \geq \lambda - lL^{-۱}(۲\alpha)\right\} \\ &= \lambda - lL^{-۱}(۲\alpha) \end{aligned} \qquad (۴)$$

همچنین برای $\alpha \in [۰/۵, ۱]$ نیز می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \left(\tilde{X}_\omega\right)_\alpha &= inf\left\{x \in \tilde{X}_\omega[۰] : ۱ - \frac{۱}{۲}R\left(\frac{x-\lambda}{r}\right) \geq \alpha\right\} \\ &= inf\left\{x \in \tilde{X}_\omega[۰] : x \geq \lambda + rR^{-۱}(۲(۱-\alpha))\right\} \\ &= \lambda + rR^{-۱}(۲(۱-\alpha)) \end{aligned} \qquad (۵)$$

حال با توجه به دو رابطه (۴) و (۵) قضیه اثبات می‌شود. □

قضیهٔ ۱۳.۲. *اگر $\tilde{X}_\omega$ مطابق با تعریف ۴.۲ و C تابع قابلیت تغییرپذیری ذکرشده در تعریف ۱۰.۲ باشد، آنگاه مقدار α-بدبینانه با استفاده از α-برش $\tilde{X}_\omega$ به‌صورت زیر است*

$$\left(\tilde{X}_\omega\right)_\alpha = \begin{cases} \left(\tilde{X}_\omega\right)^L_{۲\alpha} & ; \quad \alpha \in (۰, ۰/۵] \\ \left(\tilde{X}_\omega\right)^U_{۲(۱-\alpha)} & ; \quad \alpha \in [۰/۵, ۱] \end{cases}$$

اثبات. با توجه به تعریف ۱۰.۲ و ۱۱.۲ می‌توان نوشت

$$\left(\tilde{X}_\omega\right)_\alpha = \begin{cases} inf\left\{x \in \tilde{X}_\omega[۰], x < \lambda : \mu_{\tilde{X}_\omega}(x) \geq ۲\alpha\right\}; \\ \alpha \in (۰, ۰/۵] \\ inf\left\{x \in \tilde{X}_\omega[۰], x > \lambda : \mu_{\tilde{X}_\omega}(x) \leq ۲(۱-\alpha)\right\}; \\ \alpha \in [۰/۵, ۱] \end{cases}$$

که در آن $x < \lambda$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ می‌باشد. حال با استفاده از تعریف ۸.۲ می‌توان این مطلب را بیان کرد که

$$\left(\tilde{X}_\omega\right)_\alpha = \begin{cases} inf\left\{\tilde{X}_\omega[۲\alpha]\right\} & ; \quad \alpha \in (۰, ۰/۵] \\ inf\left\{\left[\left(\tilde{X}_\omega\right)^L_۰, \left(\tilde{X}_\omega\right)^L_{۲(۱-\alpha)}\right] \cup \left[\left(\tilde{X}_\omega\right)^U_{۲(۱-\alpha)}, \left(\tilde{X}_\omega\right)^U_۰\right]\right\} & ; \quad \alpha \in [۰/۵, ۱] \end{cases}$$

از طرفی با استفاده از رابطه‌ی (۱) می‌توان این مطلب را بیان کرد که $\tilde{X}_\omega[۲\alpha] = \left[\left(\tilde{X}_\omega\right)^L_{۲\alpha}, \left(\tilde{X}_\omega\right)^U_{۲\alpha}\right]$ و درنتیجه قضیه اثبات می‌شود. □

قضیهٔ ۱۴.۲. *اگر $\tilde{X}_\omega$ مطابق با تعریف ۴.۲ باشد، آنگاه α-برش مجموعه‌ی فازی $\tilde{X}_\omega$ به ازای هر $\omega \in \Omega$ به‌صورت زیر است*

$$\tilde{X}_\omega[\alpha] = \left[\left(\tilde{X}_\omega\right)_{\frac{\alpha}{۲}}, \left(\tilde{X}_\omega\right)_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\right]$$

اثبات. با استفاده از قضیه‌ی ۱۳.۲ به‌راحتی می‌توان نشان داد که

$$\left(\tilde{X}_\omega\right)^L_\alpha = \left(\tilde{X}_\omega\right)_{\frac{\alpha}{۲}} \quad ; \quad \forall\alpha \in (۰, ۱] \qquad (۶)$$

و

$$\left(\tilde{X}_\omega\right)^U_\alpha = \left(\tilde{X}_\omega\right)_{۱-\frac{\alpha}{۲}} \quad ; \quad \forall\alpha \in (۰, ۱] \qquad (۷)$$

درنتیجه با توجه به رابطه‌ی (۱) و با استفاده از روابط (۶) و (۷) قضیه اثبات می‌شود. □

تعریف ۱۵.۲. *اگر $\tilde{X}_\omega$ مطابق با تعریف ۴.۲ باشد، آنگاه تابع توزیع تجمعی آن با نماد $\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}$ نمایش داده‌شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود*

$$\forall\omega\in\Omega \quad ; \quad \tilde{F}_{\tilde{X}_\omega} : \mathcal{F}_{LR}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}_{LR}([0,1])$$

و

$$\mathcal{F}_{LR}([0,1]) = \left\{\tilde{X}_\omega : \tilde{X}_\omega = (\lambda,l,r)_{LR} : [0,1] \to [0,1]; \omega\in\Omega\right\}$$

می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت

$$\forall\omega\in\Omega \quad , \quad y\in\mathcal{F}_{LR}(\mathbb{R}) \quad ; \quad \tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}(y)\in\mathcal{F}_{LR}([0,1])$$

و تابع عضویت آن به‌صورت زیر می‌باشد

$$\forall\omega\in\Omega \quad , \quad y\in\mathcal{F}_{LR}(\mathbb{R}) \quad ; \quad \mu_{\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}}(y) : [0,1]\to[0,1]$$

که در آن $\mu_{\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}}$ به‌صورت

$$\mu_{\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}}(t_0) = sup\left\{\alpha\in[0,1] : F_{\left(\tilde{X}_\omega\right)_\alpha}(x) = t_0 \quad ; \quad \forall t_0\in[0,1]\right\}$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۱۶.۲. *به ازای هر $\omega\in\Omega$ و $y\in\mathcal{F}_{LR}(\mathbb{R})$، مجموعه فازی $\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}$ با تابع عضویت $\mu_{\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}}$ را در نظر بگیرید. α-برش مجموعه فازی $\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}$ به ازای هر $\omega\in\Omega$ و با توجه به تعریف ۸.۲ به‌صورت زیر است*

$$\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}[\alpha] = \{x\in\mathbb{R} : \mu_{\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}}(x)\geq\alpha\}$$

از طرفی می‌توان α-برش $\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}$ را به ازای هر $\omega\in\Omega$ با استفاده از رابطه‌ی (۱) به صورتی دیگر نیز به دست آورد

$$\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}[\alpha] = \left[\left(\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}\right)^L_\alpha, \left(\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}\right)^U_\alpha\right]$$

که در آن

$$\left(\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}\right)^L_\alpha = inf\left\{x\in\mathbb{R} : x\in\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}[\alpha]\right\}$$

و

$$\left(\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}\right)^U_\alpha = sup\left\{x\in\mathbb{R} : x\in\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}[\alpha]\right\}$$

می‌باشد.

تعریف ۱۷.۲. *برای مجموعه‌ی فازی F به ازای هر $\omega\in\Omega$ مقدار α-برش آن با توجه به تعریف ۱۶.۲ و قضیه‌ی ۱۴.۲ به‌صورت زیر است (حسامیان و چاچی (۲۰۱۵))*

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{\tilde{X}_\omega}[\alpha] &= \left[F_{\left(\tilde{X}_\omega\right)_{1-\frac{\alpha}{2}}}(x), F_{\left(\tilde{X}_\omega\right)_{\frac{\alpha}{2}}}(x)\right]\\ &= \left[P\left(\left(\tilde{X}_\omega\right)_{1-\frac{\alpha}{2}}\leq x\right), P\left(\left(\tilde{X}_\omega\right)_{\frac{\alpha}{2}}\leq x\right)\right].\end{aligned}$$

۳ متغیرهای تصادفی فازی توأم

هدف از این بخش این است که تمام مطالب بیان‌شده برای حالت تک متغیره را برای حالت دومتغیره نیز بیان کنیم.

تعریف ۱.۳. *فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی فازی روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشند. همچنین فرض کنید α-برش‌های $A[\alpha]$ و $B[\alpha]$ بازه باشند. مجموعه‌ی فازی $\mathbb{A} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,1]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$\mathbb{A}(x,y) = sup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\in[0,1] : (x,y)\in A[\alpha]\times B[\alpha]\}$$

قضیهٔ ۲.۳. *فرض کنید C یک فضای کامل و U یک مجموعه باشد. اگر*

$$\mathcal{F}(U) = \{\mathbb{A} : \mathbb{A} : U\to C\}$$

و

$$\mathcal{L}(U) = \left\{g | g : C\to\mathcal{F}(U) \quad ; g\left(\bigvee D\right) = \bigcap_{d\in D} g(d)\right\}$$

آنگاه $\Phi : \mathcal{F}(U)\to\mathcal{L}(U)$ با ضابطه‌ی $\Phi(A) = A^{-1}\uparrow$ یک نگاشت یک‌به‌یک و پوشا است [۹].

اثبات. برای مشاهده‌ی اثبات آن به [۴] و [۹] مراجعه کنید. □

قضیهٔ ۳.۳. *اگر $\mathbb{A}$ مجموعه‌ی فازی ذکرشده در تعریف ۱.۳ باشد، آنگاه α-برش آن به‌صورت زیر است*

$$\mathbb{A}[\alpha] = A[\alpha]\times B[\alpha] \quad ; \quad \alpha\in[0,1].$$

اثبات. فرض کنید $C = [0,1]$ و $U = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. با توجه به قضیه‌ی ۲.۳ می‌توان گفت $D\in\mathcal{P}(U) = \mathcal{P}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ و ترتیب روی U را به‌صورت زیرمجموعه $\subseteq$ در نظر می‌گیریم. از طرفی تابع $g : [0,1]\to\mathcal{P}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ را به‌صورت $g(\alpha) = \mathbb{D}[\alpha] = A[\alpha]\times B[\alpha]$ تعریف می‌کنیم. اکنون باید این مطلب را اثبات کنیم که تساوی $g\left(\bigvee D\right) = g\left(\bigvee_{\alpha\in D} d\right) = \bigcap_{\alpha\in D} g(\alpha); \forall\alpha\in[0,1]$ برقرار است. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}g\left(\bigvee D\right) &= E\left[\bigvee D\right] = A\left[\bigvee D\right]\times B\left[\bigvee D\right]\\ &= \left(\bigcap_{\alpha\in D} A[\alpha]\right)\times\left(\bigcap_{\alpha\in D} B[\alpha]\right)\\ &= \bigcap_{\alpha\in D}\left(A[\alpha]\times B[\alpha]\right) = \bigcap_{\alpha\in D} g(\alpha)\end{aligned}$$

بنابراین $g \in \mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ می‌باشد. درنتیجه یک مجموعه‌ی فازی منحصربه‌فرد به‌صورت $\mathbb{A} \in \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $\alpha \in [0,1]$، $\mathbb{A}[\alpha] = \mathbb{D}[\alpha] = A[\alpha] \times B[\alpha]$ است. □

تعریف ۳.۴. *فرض کنید*

$$\left(\tilde{X}, \tilde{Y}\right) : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathcal{F}_{LR}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}_{LR}(\mathbb{R})$$

به‌صورت زیر تعریف شود

$$\forall \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2 \quad ; \quad \left(\tilde{X}_{\omega_1}, \tilde{Y}_{\omega_2}\right) \in \mathcal{F}_{LR}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}_{LR}(\mathbb{R})$$

آنگاه تابع عضویت توأم آن‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2 \quad ; \quad \mu_{(\tilde{X}_{\omega_1}, \tilde{Y}_{\omega_2})} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,1]$$

۴ تابع توزیع تجمعی توأم متغیرهای تصادفی توأم فازی وابسته

هدف از این بخش بیان α-برش‌ها برای متغیرهای تصادفی فازی توأم و توابع توزیع تجمعی آن‌ها است. همچنین در اینجا به مفهوم مفصل و کاربرد آن در ساخت تابع توزیع تجمعی توأم متغیرهای تصادفی فازی وابسته اشاره‌شده است. مفصل معمولاً در قضیه‌های آمار و احتمال کاربرد دارد. بدین‌صورت که مفصل یک توزیع احتمال چندمتغیره برای توزیع احتمال حاشیه‌ای هریک از متغیرهای یکنواخت می‌باشد. همچنین از مفصل‌ها برای توصیف وابستگی بین متغیرهای تصادفی استفاده می‌شود [۱۱] و [۱۲]. اصولاً فرض می‌شود که متغیرهای تصادفی توأم فازی از هم مستقل باشند، اما مواردی نیز وجود دارد که این متغیرها به هم وابسته می‌باشند. یکی از توابعی که می‌تواند ساختار وابستگی این متغیرها را مشخص کند، تابع مفصل است. در این بخش سعی می‌کنیم تابع توزیع تجمعی توأم متغیرهای تصادفی توأم فازی را که از طریق تابع مفصل وابسته باشند، به دست می‌آوریم.

تعریف ۱.۴. *به ازای هر $\omega_1 \in \Omega_1$ و $\omega_2 \in \Omega_2$، مجموعه فازی $\left(\tilde{X}_{\omega_1}, \tilde{Y}_{\omega_2}\right)$ با تابع عضویت توأم $\mu_{(\tilde{X}_{\omega_1}, \tilde{Y}_{\omega_2})}$ را در نظر بگیرید. α-برش مجموعه فازی $\left(\tilde{X}_{\omega_1}, \tilde{Y}_{\omega_2}\right)$ به ازای هر $\omega_1 \in \Omega_1$ و $\omega_2 \in \Omega_2$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.*

$$\tilde{H}_{(\tilde{X}_{\omega_1}, \tilde{Y}_{\omega_2})}[\alpha] = \tilde{F}_{\tilde{X}_{\omega_1}}[\alpha] \times \tilde{G}_{\tilde{Y}_{\omega_2}}[\alpha]$$

که در آن

$$\tilde{F}_{\tilde{X}_{\omega_1}}[\alpha] = \left[\left(\tilde{F}_{\tilde{X}_{\omega_1}}\right)^L_\alpha, \left(\tilde{F}_{\tilde{X}_{\omega_1}}\right)^U_\alpha\right]$$

و

$$\tilde{G}_{\tilde{Y}_{\omega_2}}[\alpha] = \left[\left(\tilde{G}_{\tilde{Y}_{\omega_2}}\right)^L_\alpha, \left(\tilde{G}_{\tilde{Y}_{\omega_2}}\right)^U_\alpha\right]$$

می‌باشند.

تعریف ۲.۴. *به ازای هر $\omega_1 \in \Omega_1$ و $\omega_2 \in \Omega_2$ و با توجه به تعریف ۱۷.۲ می‌توان α-برش مجموعه‌ی فازی $\left(\tilde{X}_{\omega_1}, \tilde{Y}_{\omega_2}\right)$ را به‌صورت زیر تعریف کرد*

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{(\tilde{X}_{\omega_1}, \tilde{Y}_{\omega_2})}[\alpha] &= \left[F_{(\tilde{X}_{\omega_1})_{1-\frac{\alpha}{2}}}(x), F_{(\tilde{X}_{\omega_1})_{\frac{\alpha}{2}}}(x)\right] \\ &\times \left[G_{(\tilde{Y}_{\omega_2})_{1-\frac{\alpha}{2}}}(y), G_{(\tilde{Y}_{\omega_2})_{\frac{\alpha}{2}}}(y)\right] \\ &= \left[P\left(\left(\tilde{X}_{\omega_1}\right)_{1-\frac{\alpha}{2}} \le x\right), P\left(\left(\tilde{X}_{\omega_1}\right)_{\frac{\alpha}{2}} \le x\right)\right] \\ &\times \left[P\left(\left(\tilde{Y}_{\omega_2}\right)_{1-\frac{\alpha}{2}} \le y\right), P\left(\left(\tilde{Y}_{\omega_2}\right)_{\frac{\alpha}{2}} \le y\right)\right].\end{aligned}$$

تعریف ۳.۴. *به ازای هر $\omega \in \Omega$ متغیر تصادفی فازی $\tilde{Q}_\omega = \tilde{X}_\omega + \tilde{Z}_\omega$ و به ازای هر $\omega_1 \in \Omega_1$ و $\omega_2 \in \Omega_2$، مجموعه فازی $\left(\tilde{Y}_{\omega_1}, \tilde{Q}_{\omega_2}\right)$ با تابع عضویت توأم $\mu_{(\tilde{Y}_{\omega_1}, \tilde{Q}_{\omega_2})}$ را در نظر بگیرید. α-برش مجموعه فازی $\left(\tilde{Y}_{\omega_1}, \tilde{Q}_{\omega_2}\right)$ به ازای هر $\omega_1 \in \Omega_1$ و $\omega_2 \in \Omega_2$ و با توجه به تعریف ۱.۴ به‌صورت زیر تعریف می‌شود*

$$\tilde{H}_{(\tilde{Y}_{\omega_1}, \tilde{Q}_{\omega_2})}[\alpha] = \tilde{F}_{\tilde{Y}_{\omega_1}}[\alpha] \times \tilde{G}_{\tilde{Q}_{\omega_2}}[\alpha]$$

که در آن

$$\tilde{F}_{\tilde{Y}_{\omega_1}}[\alpha] = \left[\left(\tilde{F}_{\tilde{Y}_{\omega_1}}\right)^L_\alpha, \left(\tilde{F}_{\tilde{Y}_{\omega_1}}\right)^U_\alpha\right]$$

و

$$\tilde{G}_{\tilde{Q}_{\omega_2}}[\alpha] = \left[\left(\tilde{G}_{\tilde{Q}_{\omega_2}}\right)^L_\alpha, \left(\tilde{G}_{\tilde{Q}_{\omega_2}}\right)^U_\alpha\right]$$

می‌باشند. این α-برش به صورتی دیگر نیز بیان می‌شود

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{(\tilde{Y}_{\omega_1}, \tilde{Q}_{\omega_2})}[\alpha] &= \left[F_{(\tilde{Y}_{\omega_1})_{1-\frac{\alpha}{2}}}(y), F_{(\tilde{Y}_{\omega_1})_{\frac{\alpha}{2}}}(y)\right] \\ &\times \left[G_{(\tilde{Q}_{\omega_2})_{1-\frac{\alpha}{2}}}(q), G_{(\tilde{Q}_{\omega_2})_{\frac{\alpha}{2}}}(q)\right] \\ &= \left[P\left(\left(\tilde{Y}_{\omega_1}\right)_{1-\frac{\alpha}{2}} \le y\right), P\left(\left(\tilde{Y}_{\omega_1}\right)_{\frac{\alpha}{2}} \le y\right)\right] \\ &\times \left[P\left(\left(\tilde{Q}_{\omega_2}\right)_{1-\frac{\alpha}{2}} \le q\right), P\left(\left(\tilde{Q}_{\omega_2}\right)_{\frac{\alpha}{2}} \le q\right)\right].\end{aligned}$$

تعریف ۴.۴. *فرض کنید $\mathbb{I} = [0,1]$. تابع $C : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{I}$ یک مفصل است اگر دارای ویژگی‌های زیر باشد [۸] و [۱۱]*

۱) *به ازای هر $u, v \in \mathbb{I}$*

$$C(u,0) = C(0,v) = 0 \quad ; \quad C(u,1) = 1 \quad , \quad C(1,v) = 1$$

۲) به ازای هر $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{I}$ به‌طوری‌که $u_1 < u_2$ و $v_1 < v_2$

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

اسکلار (۱۹۵۹) در قضیه‌ی معروف خود بیان می‌دارد که اگر H تابع توزیع تجمعی توأم با توابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای F و G باشد. در این حالت یک مفصل مانند C وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ داریم

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \tag{۸}$$

علاوه بر این اگر F و G توابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای پیوسته باشند، آنگاه C یکتا است. همچنین اگر C یک مفصل و F و G توابع توزیع تجمعی باشند، آنگاه تابع H تعریف‌شده در رابطه‌ی (۸) یک تابع توزیع تجمعی توأم با توابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای F و G است. علاوه بر این اگر F^{-1} و G^{-1} به ترتیب توابع معکوس F و G باشند، آنگاه برای هر $u, v \in \mathbb{I}^2$ می‌توان گفت (نلسن [10] [۸] و[۱۱])

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)).$$

مثال ۵.۴. اگر X و Y دومتغیر تصادفی فازی دارای تابع توزیع تجمعی توأم به‌صورت زیر باشند [۱۱]

$$H(x, y) = \frac{(x+1)(1-e^{-y})}{(x-1)e^{-y}+2} \quad ; \quad (x, y) \in [-1, 1] \times [0, \infty]$$

آنگاه تابع مفصل آن به‌صورت زیر است

$$C(x, y) = \frac{uv}{u+v-uv} \quad ; \quad (u, v) \in [0, 1]^2.$$

در مثال زیر سعی می‌کنیم با استفاده از مفهوم α-بدبینانه و قضیه‌ی ۱۲.۲، تابع توزیع تجمعی توأم دو متغیر تصادفی فازی وابسته را بسازیم. (برای رویکردی مشابه، رنجبر و حسامیان (۲۰۱۷) را ببینید.)

مثال ۶.۴. فرض‌کنید X و Y دو متغیر تصادفی و $\tilde{\theta}_1$ و $\tilde{\theta}_2$ دو عدد فازی LR باشند به‌طوری‌که $\tilde{X} = \tilde{\theta}_1 + X$ و $\tilde{Y} = \tilde{\theta}_2 + Y$ است. همچنین تابع توزیع تجمعی توأم را برای دو متغیر تصادفی X و Y به‌صورت H در مثال ۵.۴ در نظر می‌گیریم. بنابراین متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت روی بازه‌ی $[-1, 1]$ و متغیر تصادفی Y دارای توزیع نمایی با میانگین یک است و $\tilde{\theta}_1$ و $\tilde{\theta}_2$ دو عدد فازی ثابت هستند که می‌توان آن‌ها را دو عدد فازی LR در نظرگرفت بدین معنی‌که $\tilde{\theta}_1 = (\theta_1, a, b)$ و $\tilde{\theta}_2 = (\theta_2, c, d)$ که در آن‌ها θ_1، θ_2، a، b، c و d مقادیر معلوم و L و R توابع ثابت هستند. بنابراین به ازای هر $\omega_1 \in \Omega_1$ و $\omega_2 \in \Omega_2$ می‌توان گفت $\tilde{X}_{\omega_1} = (X_{\omega_1} + \theta_1, a, b)$ و $\tilde{Y}_{\omega_2} = (Y_{\omega_2} + \theta_2, c, d)$ است. درنتیجه با استفاده از قضیه‌ی ۱۲.۲ می‌توان α-بدبینانه را برای $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ به ترتیب به‌صورت زیر بیان کرد [۱۱].

$$\left(\tilde{X}_{\omega_1}\right)_\alpha = \begin{cases} X + \theta_1 - aL^{-1}(2\alpha) & ; \quad \alpha \in (0, 0.5] \\ X + \theta_1 + bR^{-1}(2(1-\alpha)) & ; \quad \alpha \in (0.5, 1] \end{cases}$$

و

$$\left(\tilde{Y}_{\omega_2}\right)_\alpha = \begin{cases} Y + \theta_2 - cL^{-1}(2\alpha) & ; \quad \alpha \in (0, 0.5] \\ Y + \theta_2 + dR^{-1}(2(1-\alpha)) & ; \quad \alpha \in (0.5, 1] \end{cases}$$

از طرفی به‌سادگی بیان می‌شود که به ازای هر $\omega_1 \in \Omega_1$ و $\omega_2 \in \Omega_2$ ، $\left(\tilde{X}_{\omega_1}\right)_\alpha$ ها از توزیع وایبول و $\left(\tilde{Y}_{\omega_2}\right)_\alpha$ ها از توزیع یکنواخت هستند. به‌عبارت‌دیگر

$$\left(\tilde{X}_{\omega_1}\right)_\alpha = \begin{cases} Weibull(\theta - aL^{-1}(2\alpha), 1, 1) & ; \quad \alpha \in (0, 0.5] \\ Weibull(\theta + bR^{-1}(2(1-\alpha)), 1, 1); & \alpha \in (0.5, 1] \end{cases}$$

و

$$\left(\tilde{Y}_{\omega_2}\right)_\alpha = \begin{cases} U(\theta - cL^{-1}(2\alpha) - 1, \\ \theta - cL^{-1}(2\alpha) + 1) & ; \quad \alpha \in (0, 0.5] \\ U(\theta + dR^{-1}(2(1-\alpha)) - 1, \\ \theta + dR^{-1}(2(1-\alpha)) + 1) & ; \alpha \in (0.5, 1] \end{cases}$$

با محاسبه‌ی توابع حاشیه‌ای، تابع توزیع تجمعی توأم برای $\tilde{X}_{\omega_1}$ و $\tilde{Y}_{\omega_2}$ با توجه به α-بدبینانه به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} \left(\tilde{H}_{(\tilde{X}_{\omega_1}, \tilde{Y}_{\omega_2})}(x, y)\right)_\alpha &= H_{\left((\tilde{X}_{\omega_1})_{1-\alpha}, (\tilde{Y}_{\omega_2})_{1-\alpha}\right)}(x, y) \\ &= \frac{(x + 1 - k_1(\alpha))(1 - e^{-(y - k_2(\alpha))})}{(x - 1 - k_1(\alpha))e^{-(y - k_2(\alpha))} + 2} \end{aligned}$$

که در آن

$$k_1(\alpha) = \begin{cases} \theta_1 + bR^{-1}(2\alpha) & ; \quad \alpha \in (0, 0.5] \\ \theta_1 - aL^{-1}(2(1-\alpha)) & ; \quad \alpha \in (0.5, 1] \end{cases}$$

و

$$k_2(\alpha) = \begin{cases} \theta_2 + dR^{-1}(2\alpha) & ; \quad \alpha \in (0, 0.5] \\ \theta_2 - cL^{-1}(2(1-\alpha)) & ; \quad \alpha \in (0.5, 1]. \end{cases}$$

[10] Nelsen

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه به تعریف متغیر تصادفی فازی، بیان تابع توزیع تجمعی مربوط به آن، α–برش، تابع قابلیت تغییرپذیری و α–بدبینانه پرداختیم. سپس توانستیم این مفاهیم مطرح‌شده را برای متغیر تصادفی فازی توأم بیان کنیم. همچنین به بیان مفهوم مفصل و کاربرد آن در ساخت تابع توزیع تجمعی توأم پرداختیم و مثالی را برای آن مطرح و درنهایت نیز کاربرد مفصل در ساخت تابع توزیع تجمعی توأم دو متغیر تصادفی فازی و مثالی را برای این مطلب بیان کردیم.

مراجع

[۱] پرچمی، عباس (۱۳۹۸). متغیر تصادفی فازی LR. سیستم‌های فازی و کاربردها، سال دوم، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۸، صص ۸۹–۱۰۷.

[۲] طاهری، محمود. ماشین‌چی، ماشاالله (۱۳۸۷). مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، چاپ اول.

[۳] ماشین‌چی، ماشاالله (۱۳۷۹). مجموعه‌های مشکک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، چاپ اول، تابستان ۱۳۷۹.

[۴] موسوی، سیدعلی. ماشین‌چی، ماشاالله (۱۴۰۰). نخستین درس در نظریه مجموعه‌های فازی، دانشگاه شهید باهنر کرمان.

[5] Berkachy, R., Donze, L. (2019). *Fuzzy Confidence Interval Estimation by Likelihood Ratio*, 11th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, Atlantis Studies in Uncertainty Modelling, Volume 1, http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/.

[6] Hesamian, G., Chachi, J. (2015). *Two-sample Kolmogorov-Smirnov fuzzy test for fuzzy random variables*, Stat, **56**, 61-82.

[7] Liu, B. (2013). *Uncertainty theory*, 4th edn, Springer, Berlin.

[8] Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas*, Springer, New York.

[9] Nguyen, H. T., and Walker, E. A. (2005). *A First Course in Fuzzy Logic*, Chapman & Hall, Springer, Berlin Heidelberg, NewYork.

[10] Peng, J., and Liu, B. (2004). *Some properties of optimistic and pessimistic values of fuzzy*, International Conference on Fuzzy Systems, Budapest, Hungary (25-29 July 2004), **2**, 745-750.

[11] Ranjbar, V., and Hesamian, G. (2017). *Copula function for fuzzy random variables: applications in measuring association between two fuzzy random variables*, Statistical Papers (Stat Papers), Springer-Verlag GmbH, Germany.

[12] Sklar, M. (1959). *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Université Paris 8, Saint-Denis.

Jointly dependent fuzzy random variables based on α-pessimistic

Benita Dowlatzadeh[1], Ayub Sheikhy[2], Mashaallah Mashinchi[3] and Alireza Arabpour[4]

Abstract:

In this article, firstly, the concepts required for fuzzy random variable are stated, and studied the fuzzy random variable and its cumulative distribution function, that these concepts are proposed using α-pessimism. Then all these concepts are expressed for the fuzzy random variable and their cumulative distribution function. Now, because the copula concept and its application are used in the construction of cumulative distribution function, for this purpose, the copula application in the construction of the cumulative distribution function of two fuzzy random variables is presented. Finally, in order to better understand the copula concept, we give an example for it.

Keywords: Fuzzy random variables, α-pessimistic, Variability function, Fuzzy jointly cumulative distribution function, Copula.

[1]PhD student, Department of Statistics, Faculty of Mathematics and Computer, Shahid Bahonar University of Kerman
[2]Associate Professor, Department of Statistics, Faculty of Mathematics and Computer, Shahid Bahonar University of Kerman
[3]Professor, Department of Statistics, Faculty of Mathematics and Computer, Shahid Bahonar University of Kerman
[4]Associate Professor, Department of Statistics, Faculty of Mathematics and Computer, Shahid Bahonar University of Kerman