

## برآورد آماری عدد $\pi$ با استفاده از مستطیل‌ها در مسئله سوزن بوفون

خسرو فضلی<sup>۱</sup>، کورش ارزیده<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۰۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۲۶

چکیده:

مسئله کلاسیک سوزن بوفون تجربه‌ای تصادفی است که در آن از پرتاب کاملاً "شانس" و بی‌قاعده سوزنی روی یک صفحه می‌توان برآوردی آماری برای عدد  $\pi$  به دست آورد. در این مسئله یک سوزن به تصادف روی صفحه‌ای که با خطوط موازی هم فاصله افراز شده است رها می‌شود. اگر پرتاب چندین بار به‌طور مستقل تکرار شود، برحسب تعداد دفعاتی که سوزن با یکی از خطوط برخورد می‌کند برآوردگری برای عدد  $\pi$  به دست می‌آید. در این مقاله فرض می‌کنیم صفحه به‌وسیله خطوط افقی و عمودی هم فاصله به مستطیل‌های هم‌اندازه افراز شده است. در این حالت نیز برحسب تعداد دفعات برخورد سوزن با اضلاع یک مستطیل برآوردگر دیگری برای  $\pi$  به دست می‌آوریم. نشان می‌دهیم هر دو برآوردگر به‌طور مجانبی نرمال و ناریب هستند. به‌منظور مقایسه آن‌ها، کارایی مجانبی نسبی برآوردگرها را به دست آورده و نشان می‌دهیم برآوردگر بر اساس مستطیل کارتر می‌باشد. همچنین برای عدد  $\pi$  فواصل اطمینان به دست می‌آوریم و نتایج عملی تعدادی پرتاب ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: کارایی مجانبی نسبی، مجانبی نرمال، مجانبی ناریب

### ۱ دو برآوردگر برای عدد $\pi$

فاصله بین خطوط بیشتر است، حل مسئله بدون استفاده از انتگرال، برخی محاسبات عملی و ارائه کدهای جاوا [۴] را ببینید.

اگر متغیر تصادفی  $M_n$  نشان‌دهنده تعداد دفعات برخورد سوزن با یکی از خطوط صفحه در  $n$  پرتاب مستقل باشد آنگاه  $M_n \sim B(n, p_1)$ . بنابراین نسبت  $(\ell n)/(M_n d)$  برآوردی برای عدد  $\pi$  است مشروط بر اینکه  $M_n \neq 0$ . اگر قرار دهیم  $L_n = \max\{M_n, \delta\}$  که  $\delta$  عددی دلخواه در بازه  $(0, 1)$  است، آنگاه  $L_n > 0$  و برای هر  $\varepsilon > 0$  داریم

$$\mathbf{P}(|L_n - M_n| > \varepsilon) \leq \mathbf{P}(M_n = 0) = (1 - p_1)^n. \quad (1)$$

نامساوی فوق بر این اساس قرار دارد که چون  $M_n$  یک متغیر تصادفی صحیح نامنفی است، پس اگر  $M_n \neq 0$  آنگاه  $M_n \geq 1$  و در نتیجه  $|L_n - M_n| = 0$ . بنابراین همگرایی در احتمال  $L_n - M_n \xrightarrow{P} 0$  وقتی  $n \rightarrow \infty$  برقرار است. به‌این‌ترتیب برآوردگر شناخته‌شده‌ی

$$\hat{\pi}_{1,n} = \frac{\ell n}{d L_n}, \quad (2)$$

برای عدد  $\pi$  بر اساس صفحه افراز شده به خطوط موازی با فواصل یکسان به دست می‌آید ([۲]).

مسئله سوزن بوفون به شرح زیر است: سوزنی به طول  $2\ell$  به‌طور "تصادفی" روی صفحه‌ای که به‌وسیله خطوط موازی افقی با فواصل یکسان  $2d$  افراز شده است پرتاب می‌شود. اگر فرض کنیم  $\ell < d$ ، آنگاه احتمال برخورد سوزن با یکی از خطوط برابر است با  $p_1 = (2\ell)/(\pi d)$  ([۲]) و یا رابطه ۳ را ببینید). مسئله سوزن بوفون که از نوع مسائل "احتمالات هندسی" می‌باشد، از زوایای مختلفی موردبررسی قرارگرفته است. مثلاً پرتاب سطحی با لبه‌های محدب نظیر یک چندضلعی منظم به‌جای سوزن ([۷]) یا در نظر گرفتن صفحه‌ای افراز شده به شبکه‌های مستطیلی یا مثلثی به‌جای فقط خطوط افقی ([۶]). این مسئله همچنین منجر به کاربردهای متنوعی از جمله در مبحث سنجش از راه دور<sup>۲</sup> شده است ([۳]). برای یک کاربرد فیزیکی مسئله سوزن بوفون در سه بعد که در آن احتمال برخورد ذراتی به طول دلخواه ولی ثابت، به یک شبکه تور مانند محاسبه‌شده است به [۸] مراجعه شود. جنبه‌های مختلفی از مسئله سوزن بوفون، از جمله در نظر گرفتن حالتی که طول سوزن از

<sup>۱</sup> گروه آمار دانشگاه کردستان (نویسنده مسئول: khfazli@uok.ac.ir)

<sup>۲</sup> گروه آمار دانشگاه کردستان

$\theta$  مستقل و دارای توزیع‌های یکنواخت به ترتیب روی بازه‌های  $(0, d)$ ،  $(0, c)$  و  $(0, \pi)$  هستند. بنابراین احتمال برخورد با یک خط افقی برابر است با

$$P(A) = P(X \leq \ell \sin \theta) = \int_0^\pi \int_0^{\ell \sin t} \frac{1}{\pi d} dx dt = \frac{2\ell}{\pi d}, \quad (3)$$

و به‌طور مشابه احتمال برخورد با یک خط عمودی می‌شود

$$P(B) = P(Y \leq \ell |\cos \theta|) = \frac{2\ell}{\pi c}.$$

با توجه به اینکه به ازای  $\theta \in (\pi/2, \pi)$  داریم  $\cos \theta < 0$  بنابراین در صورتی سوزن با یک خط عمودی برخورد می‌کند که  $Y \leq \ell |\cos \theta|$ . همچنین داریم

$$P(A \cap B) = P(X \leq \ell \sin \theta, Y \leq \ell |\cos \theta|) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\ell \sin t} \int_0^{\ell \cos t} \frac{1}{\pi cd} dy dx dt + \int_{\pi/2}^\pi \int_0^{\ell \sin t} \int_0^{-\ell \cos t} \frac{1}{\pi cd} dy dx dt = \frac{\ell^2}{\pi cd},$$

و در نتیجه

$$p_2 = \frac{2\ell}{\pi d} + \frac{2\ell}{\pi c} - \frac{\ell^2}{\pi cd} = \frac{2\ell(c+d) - \ell^2}{\pi cd}.$$

□

از محاسبات فوق نتیجه زیر به دست می‌آید:

**نتیجه ۲.۱.** اگر  $N_n$  نشان‌دهنده تعداد دفعاتی از  $n$  بار پرتاب مستقل باشد که سوزن با یکی از اضلاع مستطیلی در صفحه برخورد کرده است، آنگاه  $N_n \sim B(n, p_2)$ . بنابراین مشروط بر اینکه  $N_n \neq 0$ ، نسبت  $n(2\ell(c+d)d - \ell^2)/(cdN_n)$  برآوردی برای  $\pi$  می‌باشد. حال با قرار دادن  $R_n = \max\{N_n, \delta\}$  که  $\delta$  عددی دلخواه در بازه  $(0, 1)$  است، آماره

$$\hat{\pi}_{2,n} = \frac{(2\ell(c+d) - \ell^2)n}{cdR_n}, \quad (4)$$

را به‌عنوان یک برآوردگر دیگر برای  $\pi$  به دست می‌آوریم. در این حالت نیز همانند (۱)، همگرایی در احتمال  $P \rightarrow 0$   $R_n - N_n$  برقرار می‌باشد. اگر  $c = d$ ، یعنی وقتی که صفحه توسط مربع‌های  $2d \times 2d$  افراز شده است داریم:

$$\hat{\pi}_{2,n} = \frac{(4\ell d - \ell^2)n}{d^2 R_n}.$$

در این مقاله علاوه بر خطوط افقی، خطوط عمودی هم‌فاصله را نیز در نظر گرفته به‌طوری‌که صفحه به شبکه‌ای مستطیلی افراز می‌شود و بر اساس تعداد تصادفی برخوردها با ضلعی از یک مستطیل، برآوردگری برای عدد  $\pi$  به دست می‌آید. بنابراین، در هر بار پرتاب از داده‌های بیشتری می‌توان استفاده کرد که نشان می‌دهیم باعث افزایش دقت برآورد می‌شود. در [۶] شبکه‌های مربعی و مثلثی موردبررسی قرارگرفته شده و برآوردگرهایی برای عدد پی ارائه شده است. برای محاسبه احتمال برخورد سوزن در یک شبکه مستطیلی به [۱] مراجعه شود که در مقاله حاضر با دیدگاهی ساده‌تر به‌دست‌آمده است. خواص مجانبی برآوردگر حاصل از مسئله اصلی سوزن بوفون (۲) و برآوردگر بر اساس شبکه مستطیلی (۴)، در این مقاله موردبررسی قرار می‌گیرد و نشان می‌دهیم هر دو برآوردگر دارای توزیع مجانبی نرمال بوده و به‌طور مجانبی نااریب می‌باشند. اما واریانس مجانبی برآوردگر در شبکه مستطیلی از واریانس برآوردگر در مسئله اصلی سوزن بوفون کمتر است. برای عدد  $\pi$  به‌عنوان یک پارامتر مجهول، فاصله اطمینان‌های مجانبی به دست می‌آوریم و با به دست آوردن کارایی مجانبی نسبی این دو برآوردگر، نشان می‌دهیم برآوردگر بر اساس شبکه مستطیل شکل کاراتر می‌باشد. با استفاده از داده‌های واقعی تعدادی پرتاب انجام‌شده، برآوردهای عدد  $\pi$  را در دو حالت مذکور به دست آورده و همچنین فواصل اطمینان و طول آن‌ها را مقایسه می‌کنیم.

فرض کنید یک صفحه به‌وسیله خطوط موازی افقی هم‌فاصله به طول  $2d$  و خطوط عمودی هم‌فاصله به طول  $2c$  به مستطیل‌های یکسان  $2c \times 2d$  افراز و سنگفرش شده است. احتمال برخورد سوزن با یکی از خطوط را در قضیه زیر به دست می‌آوریم.

**قضیه ۱.۱.** فرض کنید  $\ell < \min\{c, d\}$ . در این صورت احتمال اینکه سوزن حداقل یکی از اضلاع مستطیلی در صفحه را قطع کند برابر است با:

$$p_2 = \frac{2\ell(c+d) - \ell^2}{\pi cd}.$$

**اثبات.** اگر پیشامد برخورد سوزن با یک خط افقی و عمودی، یعنی برخورد سوزن با ضلعی از یک مستطیل در صفحه را به ترتیب با  $A$  و  $B$  نشان دهیم، آنگاه

$$p_2 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  را به ترتیب فاصله مرکز سوزن از نزدیک‌ترین خط افقی و عمودی و  $\theta$  را زاویه سوزن با جهت مثبت محور افقی در نظر بگیرید. شکل ۱ را ببینید. اگر آزمایش تصادفی پرتاب سوزن به‌طور «یکنواخت» و «کاملاً شانس» انجام شود آنگاه  $X$ ،  $Y$  و

## ۲ توزیع مجانبی

در این بخش به مطالعه خواص مجانبی برآوردگرهای  $\hat{\pi}_{1,n}$  و  $\hat{\pi}_{2,n}$  پرداخته و نشان می‌دهیم هر دو به‌طور مجانبی نرمال هستند.

قضیه ۱.۰۲. اگر  $n \rightarrow \infty$ ، آنگاه

$$\sqrt{n}(\hat{\pi}_{1,n} - \pi) \xrightarrow{d} N(0, \pi^2(p_1^{-1} - 1))$$

$$\sqrt{n}(\hat{\pi}_{2,n} - \pi) \xrightarrow{d} N(0, \pi^2(p_2^{-1} - 1)),$$

که منظور از  $\xrightarrow{d}$  همگرایی در توزیع است.

اثبات. با توجه به اینکه  $M_n \sim B(n, p_1)$ ، بنابراین طبق قضیه حد مرکزی

$$\frac{M_n - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

از طرفی همگرایی در احتمال  $L_n - M_n \xrightarrow{P} 0$  (رابطه (۱))، نتیجه می‌دهد

$$\frac{L_n - M_n}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} \xrightarrow{P} 0,$$

زیرا به‌طور کلی اگر همگرایی در احتمال (یا توزیع)  $X_n \xrightarrow{P} X$  برقرار باشد و  $\{A_n\}$  دنباله‌ای از اعداد حقیقی یا دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی همگرا در احتمال یا توزیع به  $A$  باشد، آنگاه همگرایی در احتمال (یا توزیع)  $A_n X_n \xrightarrow{P} AX$  نیز برقرار است ([۵]، صفحه ۵۸). بنابراین با استفاده از قضیه اسلاتسکی داریم

$$\frac{L_n - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} = \frac{M_n - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} + \frac{L_n - M_n}{\sqrt{np_1(1-p_1)}} \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

و به‌طور مشابه

$$\frac{R_n - np_2}{\sqrt{np_2(1-p_2)}} \xrightarrow{d} N(0, 1). \quad (۶)$$

با تقسیم صورت و مخرج روابط (۵) و (۶) بر  $n$ ، همگرایی در توزیع‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{n}(\bar{L}_n - p_1) \xrightarrow{d} N(0, p_1(1-p_1))$$

$$\sqrt{n}(\bar{R}_n - p_2) \xrightarrow{d} N(0, p_2(1-p_2)).$$

که  $\bar{L}_n = L_n/n$  و  $\bar{R}_n = R_n/n$ . با در نظر گرفتن توابع

$$g_1(x) = \frac{\alpha_1}{x}, \quad \alpha_1 = \frac{2\ell}{d}$$

$$g_2(x) = \frac{\alpha_2}{x}, \quad \alpha_2 = \frac{2\ell(c+d) - \ell^2}{cd}$$

چون  $g'_i(p_i) \neq 0$  برای  $i = 1, 2$ ، بنابراین با استفاده از روش دلتا ([۵]) داریم

$$\sqrt{n}(g_1(\bar{L}_n) - g_1(p_1)) \xrightarrow{d} N(0, (g'_1(p_1))^2 p_1(1-p_1)),$$

$$\sqrt{n}(g_2(\bar{R}_n) - g_2(p_2)) \xrightarrow{d} N(0, (g'_2(p_2))^2 p_2(1-p_2)).$$

که پس از جایگذاری، همگرایی در توزیع زیر اثبات می‌شود

$$\sqrt{n}(\hat{\pi}_{i,n} - \pi) \xrightarrow{d} N(0, \pi^2(p_i^{-1} - 1)), \quad i = 1, 2. \quad (۷)$$

□

نتیجه می‌گیریم که برای  $n$  های بزرگ برآوردگر  $\hat{\pi}_{i,n}$  دارای توزیع تقریبی نرمال  $N(\pi, \pi^2(p_i^{-1} - 1)/n)$  است.

قرار دهید  $\tau_i^2 = \pi^2(p_i^{-1} - 1)$  برای  $i = 1, 2$ .

نتیجه ۲.۰۲. رابطه (۷) نشان می‌دهد برآوردگرهای  $\hat{\pi}_{1,n}$  و  $\hat{\pi}_{2,n}$  برای پارامتر  $\pi$  به‌طور مجانبی نااریب با واریانس‌های مجانبی به ترتیب  $\tau_1^2$  و  $\tau_2^2$  هستند و چون  $p_1 < p_2$  داریم  $\tau_1^2 < \tau_2^2$ .

نتیجه ۳.۰۲. از روابط (۷)، فواصل اطمینان با ضریب مجانبی  $1 - \alpha$  برای پارامتر  $\pi$  بر اساس خطوط موازی و مستطیل به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\hat{\pi}_{1,n} \left( 1 - z_{\alpha/2} \sqrt{L_n^{-1} - n^{-1}}, 1 + z_{\alpha/2} \sqrt{L_n^{-1} - n^{-1}} \right) \quad (۸)$$

$$\hat{\pi}_{2,n} \left( 1 - z_{\alpha/2} \sqrt{R_n^{-1} - n^{-1}}, 1 + z_{\alpha/2} \sqrt{R_n^{-1} - n^{-1}} \right). \quad (۹)$$

برای اختصار در نوشتن بازه‌ها از تساوی  $c(a, b) = (ca, cb)$  استفاده شده و  $z_\alpha$  چندک بالایی مرتبه  $\alpha$  توزیع نرمال استاندارد است. اثبات ادعای فوق بر این اساس قرار دارد که چون طبق قانون اعداد بزرگ  $\hat{\pi}_{i,n} \xrightarrow{P} \pi$ ، بنابراین

$$\frac{\hat{\pi}_{i,n}}{\alpha_i} \xrightarrow{P} p_i, \quad i = 1, 2,$$

و در نتیجه طبق (۷) و استفاده از خواص حدی همگرایی در توزیع ([۵]، صفحه ۵۸)،

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\pi}_{i,n} - \pi)}{\hat{\pi}_{i,n} \sqrt{\frac{\hat{\pi}_{i,n}}{\alpha_i} - 1}} = \frac{\sqrt{n}(\hat{\pi}_{i,n} - \pi)}{\pi \sqrt{p_i^{-1} - 1}} \frac{\pi \sqrt{p_i^{-1} - 1}}{\hat{\pi}_{i,n} \sqrt{\frac{\hat{\pi}_{i,n}}{\alpha_i} - 1}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

حال با در نظر گرفتن تساوی‌های  $L_n = \hat{\pi}_{1,n}/n$  و  $R_n = \hat{\pi}_{2,n}/n$ ، فواصل اطمینان مجانبی به دست می‌آیند.

### ۳ کارایی نسبی مجانبی

مربع  $R_n = 8^\circ$  مرتبه به دست آمده است. بنابراین برآوردهای زیر برای عدد  $\pi$  به دست می‌آیند:

$$\hat{\pi}_{1,n} = \frac{2\ell n}{dL_n} = 3,5037$$

$$\hat{\pi}_{2,n} = \frac{(4\ell d - \ell^2)n}{d^2 R_n} = 3,0183$$

فواصل اطمینان و طول آن‌ها در جدول ۱ آمده است. ملاحظه می‌کنیم که طول فاصله اطمینان بر اساس خطوط موازی تقریباً ۱۶ برابر طول فاصله اطمینان بر اساس افرازشای مربع شکل می‌باشد و در نتیجه خطای برآورد در این حالت کمتر است.

### ۴ پارامترهای مدل

به منظور بررسی تأثیر پارامترهای  $c, d, \ell$  در دقت برآورد در مدل شبکه مستطیلی، قرار دهید  $\gamma_1 = \ell/d$  و  $\gamma_2 = \ell/c$  در این صورت  $0 < \gamma_i < 1$

$$p_2 = \frac{2\ell(c+d) - \ell^2}{\pi cd} = \frac{2(\gamma_1 + \gamma_2) - \gamma_1\gamma_2}{\pi}$$

بنابراین

$$p_2 > \max\left\{\frac{2\gamma_1}{\pi}, \frac{2\gamma_2}{\pi}\right\} = \max\left\{\frac{2\ell}{\pi c}, \frac{2\ell}{\pi d}\right\}.$$

از این نامساوی نتیجه می‌گیریم که برآورد بر اساس افرازشای مستطیل دارای واریانس مجانبی کمتری نسبت به خطوط موازی (افقی و عمودی) می‌باشد، زیرا طبق (۷) واریانس مجانبی تابعی نزولی از احتمال برخورد است. از سوی دیگر با فرض مثلاً  $d > c$  داریم  $\gamma_1 > \gamma_2$  که معادل است با

$$4\gamma_2 - \gamma_2^2 < 2(\gamma_1 + \gamma_2) - \gamma_1\gamma_2 < 4\gamma_1 - \gamma_1^2.$$

توجه کنید که تابع  $f(x) = 4x - x^2$  در بازه  $(0, 1)$  تابعی صعودی است. بنابراین با ثابت در نظر گرفتن  $\ell$ ، واریانس مجانبی کمتری با مربع‌های  $2d \times 2d$  نسبت به مستطیل‌های  $2d \times 2c$  به دست می‌آید ولی واریانس بزرگ‌تر در مقایسه با مربع‌های  $2c \times 2c$  (البته با فرض  $c > d$ ).

در این بخش به محاسبه کارایی نسبی مجانبی برآوردها به شرح زیر می‌پردازیم. فرض کنید  $n' = n'(n)$  عبارت است از اندازه نمونه‌ای که بر اساس آن برآوردگر  $\hat{\pi}_{2,n}$  همان توزیع حدی را داشته باشد که  $\hat{\pi}_{1,n}$  بر اساس اندازه نمونه  $n$  دارد، به عبارت دیگر رابطه حدی  $\hat{\pi}_{1,n}$  نسبت به  $\hat{\pi}_{2,n}$  طبق تعریف عبارت است از

$$e_{1,2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'(n)}{n}$$

مشروط به اینکه حد وجود داشته باشد ([۵]). با توجه به تعریف واضح است که  $e_{2,1} = e_{1,2}^{-1}$ . نتیجه زیر را داریم:

گزاره ۱۰۳. کارایی مجانبی نسبی  $\hat{\pi}_{2,n}$  نسبت به  $\hat{\pi}_{1,n}$  وجود دارد و برابر است با

$$e_{2,1} = \frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}.$$

اثبات. به تبعیت از [۵] می‌نویسیم:

$$\sqrt{n}(\hat{\pi}_{2,n'} - \pi) = \sqrt{\frac{n}{n'}} \sqrt{n'}(\hat{\pi}_{2,n'} - \pi).$$

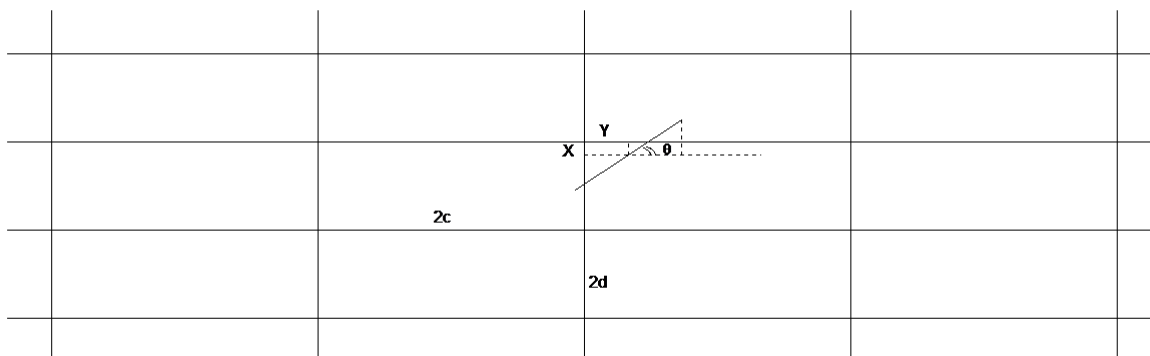
چون طبق ۷ توزیع حدی  $\sqrt{n'}(\hat{\pi}_{2,n'} - \pi)$  برابر است با  $N(0, \tau_2^2)$ ، بنابراین  $\sqrt{n}(\hat{\pi}_{2,n'} - \pi)$  دارای توزیع حدی  $N(0, \tau_1^2)$  است اگر و تنها اگر حد  $\lim n/n' = 1$  وجود داشته باشد و در این صورت برابر است با

$$e_{2,1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n'} = \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}.$$

□

از نامساوی  $p_1 < p_2$  نتیجه می‌شود  $e_{1,2} > 1$ ، یعنی به طور مجانبی، اندازه نمونه لازم برای اینکه برآوردگر در مدل خطوط موازی همان دقت برآوردگر مدل شبکه مستطیلی را داشته باشد بیشتر می‌باشد.

مثال ۲۰۳. برای  $2\ell = 43$  و  $2d = 40$  و  $2c = 2d = 40$  سانتیمتر، آزمایش پرتاب سوزن به تعداد  $n = 440$  مرتبه انجام شده که از آن‌ها تعداد دفعات برخورد با یک خط افقی  $L_n = 27$  مرتبه و دفعات برخورد با یک ضلع



شکل ۱. سوزن با یک ضلع برخورد می‌کند اگر  $X \leq l \sin \theta$  یا  $Y \leq l |\cos \theta|$

جدول ۱. برآوردها و فواصل اطمینان داده‌های مثال ۲.۳

برآوردها	برآورد	فاصله اطمینان	طول فاصله اطمینان
$\hat{\pi}_{1,n}$	۳,۵۰۳۷	(۲,۲۲۳, ۴,۷۸۴)	۲,۵۶۱
$\hat{\pi}_{2,n}$	۳,۰۱۸۳	(۲,۶۸۸, ۴,۳۱۹)	۱,۶۳۱

## مراجع

- [1] Arnow, B. J. (1994). On Laplace's extension of the Buffon needle problem. *The College Mathematics Journal*, **25(1)**, 40-43.
- [2] Gnedenko, B. (1976). *The Theory of Probability*. Fifth ed., MIR Publishers, Moscow.
- [3] Gray, H. L., Duran, B. S. (1974). A space application of an extension of the Buffon needle problem. *Communication in Statistics*, **3(8)**, 807-812.
- [4] Rocha, J, Da Silva, D. (2020). *Buffon's Needle Problem*. Université du Luxembourg Bachelor en Sciences et Ingénierie.
- [5] Lehmann, E.L., Casella G. (1998). *Theory of Point Estimation*. Second ed., Springer Verlag, New York, Inc.
- [6] Perlman, M. D., Wichura, M. J. (1975) Sharpening Buffon's needl. *The American Statistician* , **29(4)**, 157-163.
- [7] Velasco, S., Roman, F. L., Gonzalez, A., White, J. A. (2006). Statistical estimation of some irrational numbers using an extension of Buffon's needle experiment. *Internationa Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. **37(6)**, 735-740.
- [8] Zachary, E. D., Scott, V. F. (2009). The Buffon–Laplace needle problem in three dimensions. *J. Stat. Mech.*, P09010.

## Statistical estimation of the number $\pi$ by rectangles in Buffon's needle problem continuing title in this line (if required)

Kh. Fazli,<sup>1</sup> K. Arzideh<sup>2</sup>

Abstract:

The Buffon's needle problem is a random experiment leading to estimate of the number  $\pi$  by "randomly" throwing a needle onto a plane partitioned by parallel lines. Indeed, in the independently repetitions of the experiment, based on the number of times where the needle will cross a line, one can construct an estimator of  $\pi$ . The aim of this note is to obtain a better new estimator (in some sense) by considering a model where the plane is partitioned by rectangles. We show that both estimators are asymptotically normal and unbiased. We calculate the asymptotic relative efficiency of the estimators and show that the new estimator based on the rectangles is more efficient. We obtain also the confidence intervals for  $\pi$ . The data of a real experiment is provided.

**Keywords:** Asymptotic relative efficiency, asymptotically normal, asymptotically unbiased.

---

<sup>1</sup> KhFazli@uok.ac.ir

<sup>2</sup> K.Arzideh@uok.ac.ir