رویکرد E-بیز در برآورد انقباضی پارامتر توزیع رایلی معکوس تحت تابع زیان آنتروپی عمومی

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی [۱]، رضا زارعی [۲]

تاریخ دریافت: ۹۹/۷/۶
تاریخ پذیرش: ۹۹/۱۱/۱

چکیده:

هرگاه اطلاعاتی تقریبی و اولیه راجع به پارامتر نامعلوم یک توزیع در دسترس باشد، می‌توان از روش برآورد انقباضی برای برآورد آن استفاده نمود. در این مقاله ابتدا برآورد E-بیز پارامتر توزیع رایلی معکوس تحت تابع زیان آنتروپی عمومی به دست آورده شده و سپس به کمک مقدار حدسی پارامتر توزیع رایلی معکوس، برآورد انقباضی آن ارائه‌شده است. همچنین با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مجموعه داده واقعی، برآورد انقباضی پیشنهادی با برآوردهای ناااریب با کمترین واریانس و E-بیز بر اساس معیار کارایی نسبی، مقایسه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توزیع رایلی معکوس، برآورد انقباضی، برآورد E-بیز، تابع زیان آنتروپی عمومی.

۱ مقدمه

توزیع رایلی معکوس برای اولین بار توسط تریر معرفی و از آن زمان تاکنون مطالعات متعددی درباره این توزیع در زمینه‌های گوناگونی انجام‌شده و خواص مختلفی از آن موردبررسی قرارگرفته است [۶]، [۲۴]، [۲۶]. این توزیع یکی از مهم‌ترین توزیع‌هایی است که در نظریه قابلیت اعتماد و آزمون‌های مربوط به طول عمر کاربرد دارد [۷]. اخیراً توزیع‌هایی بر پایه توزیع رایلی معکوس معرفی‌شده‌اند که می‌توان به توزیع‌های رایلی معکوس کووارامی [۲۱] و رایلی معکوس اصلاح‌شده اشاره کرد [۱۴]. همچنین بین توزیع رایلی معکوس و برخی توزیع‌های دیگر رابطه‌ای وجود دارد، که در ادامه به چند حالت اشاره می‌شود. توزیع رایلی معکوس حالتی خاص از توزیع وایبول معکوس است. تابع توزیع وایبول معکوس به‌صورت

$$F(x;\theta,\alpha)=e^{-\frac{\theta}{x^{\alpha}}},\quad x>0;\alpha>0;\theta>0,$$

است [۱۳]. اگر $\alpha=2$ باشد، آنگاه توزیع وایبول معکوس به توزیع رایلی معکوس تبدیل می‌شود. با فرض این‌که X متغیر تصادفی دارای توزیع نمایی با پارامتر θ باشد، در این صورت $Y=1/\sqrt{2X\sigma^2\theta}$ دارای توزیع رایلی معکوس با پارامتر σ خواهد بود. علاوه بر آن، اگر X_1، $\cdots$، X_n یک نمونه تصادفی از توزیع رایلی معکوس باشند، آنگاه $\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ توزیع گاما دارد.

برآوردهای انقباضی در زمینه‌های مختلف مانند برآورد میانگین زمان بقا در مطالعات اپیدمولوژی [۱۱]، برآورد در مطالعات نقشه‌برداری [۲۹]، پیش‌بینی سرمایه [۲۸] و برآورد نرخ‌های مرگ‌ومیر [۱۷] کاربرد دارد. تاکنون محققین مختلفی از رویکرد انقباضی در نظریه برآوردها استفاده کرده‌اند. برآوردهای معکوس پراکندگی در توزیع معکوس گاوسی تحت تابع زیان لاینکس [۱۹]، برآوردهای انقباضی پارامتر شکل توزیع پارتو تحت تابع زیان لاینکس [۲۲]، برآوردهای بیزی انقباضی نرخ شکست و تابع قابلیت اعتماد در توزیع نمایی [۲۳]، برآورد بیز و بیز انقباضی پارامتر شکل توزیع پارتو تحت تابع زیان آنتروپی [۲۰]، معرفی خانواده‌ای از برآوردگرهای انقباضی برای پارامتر شکل توزیع وایبول [۱]، آزمون اولیه برآورد بیزی انقباضی پارامتر مقیاس توزیع نمایی تحت تابع زیان درجه دوم [۲۵] و برآورد انقباضی کلاسیک و برآورد بیزی انقباضی توزیع رایلی تحت داده‌های سانسور شده [۱۵] از جمله این تحقیقات می‌باشند.

یکی از روش‌های برآورد بیز مبتنی بر توزیع‌های پیشین و اعمال شرایطی خاص روی اَبر پارامترهای آن، روش E-بیز است که توسط [۸] معرفی شد. گاهی اوقات وسیع بودن حوزه تغییرات پارامتر روی فضای پارامتر، باعث افزایش خطای برآوردگر پسین بیزی می‌شود که روش برآورد E-بیز نقش مهمی در کاهش این خطا دارد. اخیراً محققین مختلفی از این روش در نظریه برآورد استفاده کرده‌اند که در ادامه به برخی از این تحقیقات اشاره‌شده است. برآورد پارامتر توزیع نمایی و برآورد پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای توسط [۹]، برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع بور نوع ۱۲ بر اساس

[۱] گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
[۲] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران r.zarei@guilan.ac.ir

نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم توسط [۱۲]، برآورد پارامتر توزیع پاسکال توسط [۳۰]، برآورد پارامترهای توزیع پاسکال توسط [۳۱]، برآورد پارامتر مقیاس توزیع گومپرتز بر اساس طرح سانسور فزاینده نوع دوم و داده‌های فازی توسط [۳۲] برآورد پارامتر تنش-مقاومت در توزیع نمایی توسط [۳۳] از جمله مهم‌ترین این تحقیقات بوده‌اند.

ادامه این مقاله به‌این‌ترتیب تدوین‌شده است: در بخش دوم، برآوردهای ناریب با کمترین واریانس، E-بیز و E-بیز انقباضی پارامتر توزیع رایلی معکوس به دست آورده شده است و در هر مورد تابع ریسک برآوردگرها نیز در راستای مقایسه عملکردشان ارائه‌شده است. در بخش سوم، این برآوردگرهای ارائه‌شده برای پارامتر توزیع رایلی معکوس به روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و به کمک یک مجموعه داده واقعی بر اساس شاخص کارایی نسبی با یکدیگر مقایسه می‌شوند. نتایج مقاله در بخش چهارم به‌طور مختصر ارائه‌شده است.

۲ برآوردگرهای پارامتر توزیع رایلی معکوس

در این بخش به بررسی و معرفی برآوردگرهای ناریب با کمترین واریانس، E-بیز و E-بیز انقباضی برای پارامتر توزیع رایلی معکوس می‌پردازیم.

۱.۲ برآورد ناریب با کمترین واریانس

فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع رایلی معکوس با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x;\theta)=\frac{2\theta}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x^2}},\quad x>0;\theta>0. \tag{۱}$$

در این صورت تابع درستنمایی به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$L(\theta)=(2\theta)^n\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^3}\right)e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}} \tag{۲}$$

با فرض $Y=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i^2}$، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ عبارت است از

$$\hat{\theta}_{ML}=\frac{n}{Y}$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که برآوردگر ناریب با کمترین واریانس پارامتر θ که آن را با نماد T^* نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر می‌باشد

$$T^*=\frac{n-1}{n}\hat{\theta}_{ML}=\frac{n-1}{Y}$$

۲.۲ برآورد E-بیز

در این زیربخش به‌منظور استفاده از رویکرد بیزی در برآورد پارامتر θ، فرض کنید θ متغیری تصادفی دارای توزیع پیشین گاما با تابع چگالی به فرم زیر باشد

$$\pi(\theta|a,b)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}e^{-b\theta},\quad \theta>0;a>0;b>0. \tag{۳}$$

اکنون با استفاده از روابط (۲) و (۳)، θ دارای توزیع پسین گاما با پارامترهای $\alpha=n+a$ و $\beta=b+y$ می‌باشد.

برای تعیین مقادیر a و b، این دو مقدار باید طوری در نظر گرفته شوند که $\pi(\theta|a,b)$ نسبت به θ کاهشی باشد [۸]. ازاین‌رو، با توجه به رابطه

$$\frac{d\pi(\theta|a,b)}{d\theta}=\frac{b^a\theta^{a-2}e^{b\theta}}{\Gamma(a)}((a-1)-b\theta)$$

بایستی $0<a\leq 1$ و $b>0$ باشد. با توجه به عبارت به‌دست‌آمده می‌توان گفت که بزرگ بودن b باعث کاهش کارایی برآورد بیز θ می‌شود [۲]. بنابراین اَبَرپارامتر b باید از بالا کران‌دار شده و به‌صورت $0<b<c$ که در آن c مقداری ثابت است، در نظر گرفته شود.

هان [۱۰] نشان داد که مناسب‌ترین توزیع پیشین b، توزیع یکنواخت است. بنابراین در این مقاله توزیع پیشین b یعنی $\pi(b)$، توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0,c)$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین با توجه به‌شرط $0<a\leq 1$ و با در نظر گرفتن $a=1$، رابطه (۳) به

$$\pi(\theta|b)=be^{-b\theta},\quad b>0,\theta>0. \tag{۴}$$

تبدیل می‌شود.

در این مقاله برای به دست آوردن برآوردگر بیز از تابع زیان آنتروپی عمومی استفاده می‌کنیم. این تابع زیان به‌صورت تابعی برحسب نسبت $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$ صورت‌بندی شده و به فرم زیر تعریف می‌شود

$$L(\hat{\theta},\theta)\propto\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^p-p\ln\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)-1,\quad p\neq 0. \tag{۵}$$

این تابع زیان تعمیمی از تابع زیان آنتروپی است که توسط چند نویسنده مانند [۴] و [۵] استفاده شد. برآورد بیز پارامتر θ تحت تابع زیان آنتروپی عمومی به‌صورت

$$\hat{\theta}_{GB}=[E(\theta^{-p})]^{-\frac{1}{p}} \tag{۶}$$

به دست می‌آید [۳].

ازاین‌رو، با استفاده از توزیع پسین به‌دست‌آمده برای θ و رابطه (۶)، برآورد بیز θ تحت تابع زیان آنتروپی عمومی به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$\hat{\theta}_{GB}(b)=\left(\frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(n+1)}\right)^{-\frac{1}{p}}\left(b+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i^2}\right)^{-1}, \tag{۷}$$

تابع ریسک این برآوردگر به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$R_{\hat{\theta}_{GB}(b)}(\theta) = \begin{cases} A\sum_{j=0}^{\infty}(p)_j\frac{\Gamma(n+j)}{(b\theta)^j}+pI-1, & b>Y \\ B\sum_{j=0}^{\infty}(p)_j\Gamma(n+p-j)(b\theta)^j+pI-1, & b<Y \end{cases},$$

که در آن

$$I=(\frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(n+1)})^{-\frac{1}{p}}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty}(\frac{b+y}{\theta})y^{n-1}e^{-\theta y}dy,$$

$$(p)_j=\frac{(-1)^j p(p+1)\cdots(p+j-1)}{j!},$$

$$A=\frac{n}{\Gamma(n+1-p)(b\theta)^p},\qquad B=\frac{n}{\Gamma(n+1-p)(\theta)^{2p}}.$$

علاوه بر آن، با توجه به این‌که Y دارای توزیع گاما با پارامترهای n و θ می‌باشد، تابع ریسک T^* تحت تابع زیان آنتروپی عمومی به‌صورت رابطه زیر قابل‌محاسبه است

$$\begin{aligned} R_{T^*}(\theta) &= E(\frac{T^*}{\theta})^p-pE[\ln(\frac{T^*}{\theta})]-1 \\ &= \frac{(n-1)^p\Gamma(n-p)}{\Gamma(n)}+p\Psi(n)+p\ln(\frac{\theta}{n-1})-1, \end{aligned}$$

که در آن $\Psi(.)$ تابع دای‌گاما است.

در ادامه به بررسی برآوردگر E-بیز پارامتر θ می‌پردازیم. به این منظور ابتدا تعریف برآوردگر E-بیز ارائه‌شده است.

تعریف ۱.۲. [۹] فرض کنید b اَبَرپارامتر در توزیع پیشین θ و $\pi(b)$ توزیع پیشین b باشد. با فرض این‌که برآورد بیز θ، $\hat{\theta}_B(b)$ باشد، در این صورت برآورد E-بیز θ که آن را با نماد $\hat{\theta}_{EB}$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{\theta}_{EB}=E_{\pi(b)}(\hat{\theta}_B(b))=\int_{\Lambda}\hat{\theta}_B(b)\pi(b)db,\quad b\in\Lambda,$$

این برآوردگر را می‌توان به‌نوعی امید ریاضی برآورد بیز θ نسبت به توزیع پیشین b تعبیر نمود.

در این صورت با توجه به تعریف ۱.۲ و رابطه (۷)، برآورد E-بیز پارامتر θ به‌صورت

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{EB} &=\frac{1}{c}(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-p)})^{\frac{1}{p}}\int_0^c\frac{db}{b+y} \\ &=\frac{1}{c}(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-p)})^{\frac{1}{p}}\ln(\frac{c+y}{y}) \end{aligned}\qquad (۸)$$

به دست می‌آید.

از طرفی با توجه به این‌که $Y=\sum_{i=1}^n\frac{1}{X_i^2}$ دارای توزیع گاما با پارامترهای n و θ است، تابع چگالی احتمال $V=\ln(\frac{c+Y}{Y})$ به‌صورت

$$g_V(v)=\frac{(c\theta)^n}{\Gamma(n)}\frac{e^v}{(e^v-1)^{n+1}}e^{-\frac{c\theta}{e^v-1}},\quad v>0,$$

به دست می‌آید، که در این صورت تابع ریسک برآوردگر $\hat{\theta}_{EB}$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} R_{\hat{\theta}_{EB}}(\theta) =&\frac{n(c\theta)^{n-p}}{\Gamma(n+1-p)}\int_0^{\infty}\frac{v^p e^v}{(e^v-1)^{n+1}}e^{-\frac{c\theta}{e^v-1}}dv \\ &+p\ln(c\theta)-\ln(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-p)}) \\ &-\frac{p(c\theta)^n}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty}\frac{e^v\ln v}{(e^v-1)^{n+1}}e^{-\frac{c\theta}{e^v-1}}dv-1. \end{aligned}\qquad (۹)$$

۳.۲ برآورد E-بیز انقباضی

در بسیاری از موقعیت‌های کاربردی، محقق اطلاعات پیشینی درباره پارامتر نامعلوم به‌صورت یک مقدار حدسی دارد. با توجه به این مقدار حدسی، برآوردگرهایی موسوم به برآوردگرهای انقباضی به فرم

$$T=k\hat{\theta}+(1-k)\theta_0,\quad 0<k<1,\qquad (۱۰)$$

معرفی شد که در آن θ_0 مقدار حدسی θ و $\hat{\theta}$ هر برآوردگر معمول θ است [۲۷]. در این عبارت k ضریب انقباضی نام دارد که محقق با توجه به عقیده‌اش نسبت به مقدار حدسی θ_0 آن را تعیین می‌کند. تاکنون روش‌های متفاوتی برای به دست آوردن k ارائه‌شده است [۱۵]. در این مقاله k طوری تعیین می‌شود تا مخاطره برآوردگر داده‌شده در (۱۰) مینیمم گردد. مقادیر k نزدیک به یک، نشان‌دهنده گرایش برآوردگر به نمونه و مقادیر k نزدیک به صفر، نشان‌دهنده گرایش برآوردگر به مقدار حدسی است. درصورتی‌که مقدار حدسی پارامتر به مقدار واقعی آن نزدیک باشد، برآوردگرهای انقباضی رفتار بهتری نسبت به برآوردگرهای معمول مانند برآورد ماکسیمم درستنمایی دارند [۱۵].

با توجه به رابطه (۱۰)، برآورد E-بیز انقباضی پارامتر θ به‌صورت عبارت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} T =&k\hat{\theta}_{GB}+(1-k)\theta_0 \\ =&\frac{k}{c}(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-p)})^{\frac{1}{p}}\ln(\frac{c+y}{y})+(1-k)\theta_0, \end{aligned}\qquad (۱۱)$$

در نتیجه تابع ریسک برآوردگر E-بیز انقباضی θ یعنی T عبارت است از

$$\begin{aligned} R_T(\theta) =&\frac{1}{\theta^p}\int_0^{\infty}[mk\ln(1+v)+(1-k)\theta_0]^p g(v)dv \\ &-p\int_0^{\infty}\ln[mk\ln(1+v)+(1-k)\theta_0]g(v)dv \\ &+p\ln\theta-1, \end{aligned}$$

که در آن $m=\frac{1}{c}(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-p)})^{\frac{1}{p}}$

اکنون k باید طوری تعیین شود که $R_T(\theta)$ مینیمم شود. با استفاده از تساوی $\frac{dR_T(\theta)}{dk}=0$ داریم

$$\int_0^{\infty}(m\ln(1+v)-\theta_0)[U(k)^{p-1}-\frac{\theta^p}{U(k)}]g(v)dv=0,\qquad (۱۲)$$

که در آن $U(k) = mk\ln(۱+v) + (۱-k)\theta_۰$ است.
با فرض $\delta = \theta - \theta_۰$، از رابطه (۱۲) داریم

$$k_{min} = \frac{\delta}{m\ln(۱+v) - \theta_۰},$$

که در آن شرایط $\frac{\theta_۰}{m} > \ln(۱+v)$ و $\frac{\delta+\theta_۰}{m} > \ln(۱+v)$ باید برقرار باشند. با جایگذاری k_{min} در رابطه (۱۱) برآورد E-بیز انقباضی پارامتر θ به دست می‌آید.

۳ تحلیل داده‌ها

در این بخش برآورد E-بیز انقباضی با برآوردهای نااریب با کمترین واریانس و E-بیز با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی‌شده و یک مجموعه داده‌های واقعی بر اساس شاخص کارایی نسبی برآورد E-بیز پارامتر θ یعنی T نسبت به برآوردهای T^* و $\hat{\theta}_{EB}$ که به ترتیب به‌صورت

$$RE(T,T^*) = \frac{R_{T^*}(\theta)}{R_T(\theta)}, \quad RE(T,\hat{\theta}_{EB}) = \frac{R_{\hat{\theta}_{EB}}(\theta)}{R_T(\theta)} \qquad (۱۳)$$

تعریف می‌شوند، مقایسه می‌شود.

۱.۳ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش از توزیع رایلی معکوس با پارامتر $\theta = ۴$، نمونه‌هایی به‌اندازه $n = ۲۵,۳۰,۳۵,۴۰,۴۵$ تولید می‌شود. سپس با در نظر گرفتن $\theta_۰ = ۲,۳,۵$ یا $\delta = \theta - \theta_۰ = -۱,۱,۲$ و به ازای $c = ۰/۵, ۰/۷, ۱$، برآوردگرهای T، T^* و $\hat{\theta}_{EB}$ و کارایی نسبی داده‌شده در رابطه (۱۲) محاسبه‌شده و در جداول ۱ تا ۸ آورده شده است. دلیل انتخاب مقادیر c این است که با معلوم بودن θ، b به کمک رابطه (۴) تولیدشده و سپس با داشتن مقدار b، به کمک توزیع پیشین آن، می‌توان c را تولید کرد. با توجه به این مقدار شبیه‌سازی‌شده c، مقادیر ۰/۵، ۰/۷ و ۱ برای آن در نظر گرفته‌شده است. تمام نتایج شبیه‌سازی بر اساس ۵۰۰۰ مرتبه تکرار به‌دست‌آمده و میانگین برآوردگرها و کارایی نسبی به‌صورت $(T,T^*,RE(T,T^*))$ و $(T,\hat{\theta}_{EB},RE(T,\hat{\theta}_{EB}))$ در جداول گزارش‌شده‌اند. قابل‌ذکر است که در محاسبه توابع ریسک، انتگرال‌های موردبحث معمولاً داری فرم صریحی نبوده و ازاین‌رو برای محاسبه آن‌ها از روش میانگین نمونه مونت‌کارلو استفاده‌شده است. مهم‌ترین نتایج به‌دست‌آمده عبارت‌اند از:

۱. بر اساس نتایج گزارش‌شده در جداول ۱ و ۲ به ازای $p < ۰$، برآورد T^* بهتر از برآورد E-بیز انقباضی پارامتر θ است و به ازای هر ترکیبی از (c,δ) با افزایش n، مقدار کارایی برآورد E-بیز انقباضی افزایش می‌یابد.

۲. بر اساس جداول ۳ و ۴ به ازای $p > ۰$، برآورد E-بیز انقباضی پارامتر θ بهتر از برآورد T^* است و به ازای هر ترکیبی از (c,δ) با افزایش n، مقدار کارایی برآورد E-بیز انقباضی کاهش می‌یابد.

۳. برای ترکیب‌های (c,n) با افزایش n، مقدار کارایی برآورد E-بیز انقباضی برای هر δ یکسان است و به ازای هر ترکیبی از (c,δ) با افزایش n، کارایی برآورد E-بیز انقباضی کاهش می‌یابد.

۴. بر اساس نتایج گزارش‌شده در جداول ۵ تا ۸ می‌توان چنین نتیجه گرفت که به ازای $p > ۰$ همواره برآوردگر انقباضی پیشنهادی یعنی T از برآورد E بیز کاراتر است و با افزایش n، کارایی برآوردگر T افزایش می‌یابد. به ازای $p < ۰$، هر چند که نتایج شبیه‌سازی، نشان‌دهنده کاراتر بودن برآوردگر $\hat{\theta}_{EB}$ از برآوردگر T است، اما با افزایش n کارایی $\hat{\theta}_{EB}$ کاهش و کارایی T افزایش می‌یابد. در این حالت، به ازای p های کوچک‌تر، با افزایش n، به مرحله‌ای خواهیم رسید، که از آن مرحله به بعد برآوردگر T کاراتر می‌شود.

۵. به‌طورکلی، نتایج ارائه‌شده در جداول ۱ تا ۸ بیانگر آن است که مقادیر به‌دست‌آمده برای برآوردگرهای T، T^* و $\hat{\theta}_{EB}$ به مقدار واقعی $\theta = ۴$ نزدیک می‌باشند و در بین این سه برآوردگر، مقادیر به‌دست‌آمده از T کمترین اختلاف نسبت به $\theta = ۴$ را در مقایسه با دو برآوردگر دیگر دارا می‌باشد.

۲.۳ داده‌های واقعی

در این بخش از یک مجموعه داده واقعی برای تحلیل روش‌های برآورد اشاره‌شده در بخش ۲ استفاده می‌کنیم.
زمان‌های خرابی سیستم تهویه هوای هواپیمای بوئینگ ۷۲۰ به‌صورت ۵۰۲، ۳۸۶، ۳۲۶، ۱۵۳، ۱۷۴، ۷۰، ۵۹، ۵۷، ۴۸، ۲۹، ۲۹، ۲۷، ۲۶، ۲۱ و ۱۲ گزارش‌شده‌اند [۱۸]. محققین مختلف در استفاده از این داده‌ها نشان داده‌اند که توزیع رایلی معکوس به‌خوبی به آن برازش داده می‌شود [۱۶]. بر اساس داده‌های گزارش‌شده برآورد ماکسیمم درستنمایی θ برابر با ۹۵۱/۱۶ به دست می‌آید. با توجه به این مقدار، مقادیر $\theta_۰ = ۹۴۹/۱۶, ۹۵۰/۱۶, ۹۵۲/۱۶$ را به‌عنوان مقادیر حدسی θ در نظر می‌گیریم. بنابراین $\delta = \theta - \theta_۰ = -۱,۱,۲$ به دست می‌آید. با استفاده از مقادیر $\theta_۰$ و به کمک رابطه (۴)، b محاسبه می‌شود و سپس به کمک توزیع پیشین b، c به دست می‌آید. درنهایت مقادیر T، T^*، $\hat{\theta}_{EB}$، $RE(T,T^*)$ و $RE(T,\hat{\theta}_{EB})$ به ازای $\delta = -۱,۱,۲$ و $p = -۱/۵, ۲$ به دست آورده شده که در جدول ۹ آمده است. با توجه به نتایج ارائه‌شده در این جدول می‌توان چنین نتیجه گرفت که در حالت $p > ۰$، برآوردهای نااریب با مینیمم واریانس و E-بیز، کاراتر از برآورد E-

بیز انقباضی هستند، اما در حالت $p > ۰$، برآورد E-بیز انقباضی از برآوردهای نااریب با کمترین واریانس و E-بیز بهتر است.

۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله برآورد E-بیز انقباضی پارامتر توزیع رایلی معکوس تحت تابع زیان آنتروپی عمومی به دست آمد. سپس، با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و یک مجموعه داده واقعی، این برآوردگر با برآوردهای نااریب با کمترین واریانس و E-بیز پارامتر توزیع رایلی معکوس، بر اساس معیار کارایی نسبی مقایسه شد. نتایج تحلیل داده‌ها نشان‌دهنده آن است که به ازای $p < ۰$، هر چند که برآوردهای نااریب با کمترین واریانس و E-بیز از برآورد E-بیز انقباضی بهتر هستند، اما با افزایش اندازه نمونه کارایی برآوردگر انقباضی پیشنهادی نسبت به سایر برآوردگرها افزایش‌یافته و از مرحله‌ای به بعد کاراتر می‌شود. به ازای $p > ۰$، همواره برآورد E-بیز انقباضی از برآوردهای نااریب با کمترین واریانس و E-بیز بهتر است و کارایی آن با افزایش اندازه نمونه افزایش می‌یابد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از سردبیر و داوران محترم مجله به جهت ارزیابی مقاله و ارائه پیشنهادهای ارزنده‌شان که باعث ارتقاء سطح مقاله گردید، کمال تشکر و قدردانی را دارا می‌باشند.

جدول ۱. میانگین برآوردهای T، T^* و RE تحت تابع زیان آنتروپی عمومی برای $p = -۰/۵$

		δ		
c	n	−۱	۱	۲
۰/۵	۲۵	(۳/۸۴۷, ۴/۲۷۳, ۰/۴۰۶۳۴۳)	(۴/۱۲۱, ۴/۳۵۸, ۰/۴۰۶۳۴۱)	(۳/۹۳۰, ۴/۳۹۵, ۰/۴۰۶۳۴۰)
	۳۰	(۴/۰۰۵, ۴/۲۳۱, ۰/۴۰۶۸۴۷)	(۴/۰۲۲, ۴/۲۹۶, ۰/۴۰۶۸۴۷)	(۴/۱۲۷, ۴/۳۴۴, ۰/۴۰۶۸۴۷)
	۳۵	(۳/۹۹۸, ۴/۱۸۳, ۰/۴۰۷۲۱۹)	(۴/۰۱۱, ۴/۲۵۳, ۰/۴۰۷۲۱۹)	(۳/۷۹۶, ۴/۲۸۱, ۰/۴۰۷۲۱۹)
	۴۰	(۳/۹۸۳, ۴/۱۶۱, ۰/۴۰۷۴۹۵)	(۳/۷۳۱, ۴/۲۱۶, ۰/۴۰۷۴۹۵)	(۳/۷۱۰, ۴/۲۴۳, ۰/۴۰۷۴۹۵)
	۴۵	(۳/۸۸۵, ۴/۱۴۰, ۰/۴۰۷۷۰۹)	(۳/۸۶۲, ۴/۱۹۵, ۰/۴۰۷۷۰۹)	(۴/۱۲۱, ۴/۲۳۴, ۰/۴۰۷۷۰۹)
۰/۷	۲۵	(۳/۹۲۲, ۴/۲۵۹, ۰/۴۰۷۹۰۷)	(۳/۹۵۳, ۴/۳۹۶, ۰/۴۰۷۷۷۷)	(۳/۶۹۱, ۴/۴۶۰, ۰/۴۰۷۷۴۸)
	۳۰	(۴/۰۸۵, ۴/۲۱۵, ۰/۴۰۶۸۶۸)	(۳/۷۵۰, ۴/۳۲۴, ۰/۴۰۶۸۶۹)	(۴/۱۴۲, ۴/۴۲۳, ۰/۴۰۶۸۷۱)
	۳۵	(۳/۷۹۴, ۴/۱۸۱, ۰/۴۰۷۲۱۹)	(۴/۰۹۲, ۴/۲۹۲, ۰/۴۰۷۲۱۹)	(۳/۹۷۳, ۴/۳۵۶, ۰/۴۰۷۲۱۹)
	۴۰	(۳/۹۴۸, ۴/۱۶۱, ۰/۴۰۷۴۹۵)	(۳/۸۱۷, ۴/۲۴۸, ۰/۴۰۷۴۹۵)	(۴/۰۹۰, ۴/۳۲۱, ۰/۴۰۷۴۹۵)
	۴۵	(۳/۷۳۶, ۴/۱۴۰, ۰/۴۰۷۷۰۹)	(۴/۱۷۸, ۴/۲۳۲, ۰/۴۰۷۷۰۹)	(۳/۸۴۷, ۴/۲۷۵, ۰/۴۰۷۷۰۹)
۱	۲۵	(۳/۷۷۹, ۴/۲۸۴, ۰/۵۶۶۲۱۶)	(۳/۷۶۲, ۴/۴۷۷, ۰/۵۸۷۰۵۸)	(۳/۸۴۶, ۴/۶۲۷, ۰/۵۷۳۹۹۲)
	۳۰	(۳/۷۹۶, ۴/۲۳۹, ۰/۴۲۰۴۰۲)	(۴/۰۶۸, ۴/۴۲۴, ۰/۴۱۹۱۳۳)	(۳/۷۳۷, ۴/۵۲۵, ۰/۴۱۸۷۰۸)
	۳۵	(۴/۰۲۰, ۴/۲۱, ۰/۴۰۷۸۵۱)	(۴/۰۶۵, ۴/۳۶۹, ۰/۴۰۷۸۵۵)	(۴/۱۷۸, ۴/۴۹۹, ۰/۴۰۷۸۶۰)
	۴۰	(۴/۰۸۲, ۴/۱۸۸, ۰/۴۰۷۵۰۹)	(۴/۰۳۶, ۴/۳۲۶, ۰/۴۰۷۵۱۰)	(۴/۱۲۶, ۴/۴۳۹, ۰/۴۰۷۵۱۰)
	۴۵	(۴/۱۷۱, ۴/۱۷۰, ۰/۴۰۷۷۱۰)	(۳/۹۸۹, ۴/۲۹۰, ۰/۴۰۷۷۱۰)	(۳/۸۷۹, ۴/۳۷۸, ۰/۴۰۷۷۱۰)

جدول ۲. میانگین برآوردهای T، T^* و RE تحت تابع زیان آنتروپی برای $p = -$۲/۵

		δ		
c	n	۱−	۱	۲
۰/۵	۲۵	(۳/۹۴۷, ۴/۲۵۴, ۰/۷۴۴۸۳۲)	(۴/۲۸۵, ۴/۳۵۴, ۰/۷۴۴۸۳۹)	(۴/۰۰۶, ۴/۳۹۶, ۰/۷۴۴۸۴۰)
	۳۰	(۴/۲۷۰, ۴/۲۱۱, ۰/۷۵۰۴۹۳)	(۴/۰۲۹, ۴/۲۹۰, ۰/۷۵۰۴۹۳)	(۴/۰۲۵, ۴/۳۳۶, ۰/۷۵۰۴۹۳)
	۳۵	(۴/۰۰۷, ۴/۱۷۸, ۰/۷۵۴۴۳۷)	(۳/۹۸۱, ۴/۲۴۹, ۰/۷۵۴۴۳۷)	(۴/۱۶۸, ۴/۲۹۸, ۰/۷۵۴۴۳۷)
	۴۰	(۳/۹۱۹, ۴/۱۵۷, ۰/۷۵۷۳۲۹)	(۴/۱۱۲, ۴/۲۲۱, ۰/۷۵۷۳۲۹)	(۴/۱۰۲, ۴/۲۶۰, ۰/۷۵۷۳۲۹)
	۴۵	(۳/۸۸۶, ۴/۱۳۵, ۰/۷۵۹۵۴۰)	(۴/۲۷۵, ۴/۲۰۱, ۰/۷۵۹۵۴۰)	(۳/۸۲۵, ۴/۲۲۱, ۰/۷۵۹۵۴۰)
۰/۷	۲۵	(۳/۸۲۰, ۴/۲۵۱, ۰/۷۴۷۶۰۵)	(۳/۸۵۷, ۴/۳۸۴, ۰/۷۴۷۸۰۳)	(۴/۴۰۰, ۴/۵۱۷, ۰/۷۴۷۸۰۴)
	۳۰	(۳/۷۷۸, ۴/۲۰۵, ۰/۷۵۰۵۴۰)	(۳/۹۱۲, ۴/۳۲۶, ۰/۷۵۰۵۳۲)	(۳/۸۹۹, ۴/۴۰۲, ۰/۷۵۰۵۳۹)
	۳۵	(۳/۹۸۴, ۴/۱۸۰, ۰/۷۵۴۴۳۸)	(۴/۱۵۴, ۴/۲۹۱, ۰/۷۵۴۴۳۸)	(۳/۹۵۵, ۴/۳۵۳, ۰/۷۵۴۴۳۸)
	۴۰	(۳/۹۶۹, ۴/۱۵۷, ۰/۷۵۷۳۲۹)	(۳/۹۴۲, ۴/۲۵۰, ۰/۷۵۷۳۲۹)	(۴/۰۶۸, ۴/۳۱۹, ۰/۷۵۷۳۲۹)
	۴۵	(۴/۰۵۲, ۴/۱۴۰, ۰/۷۵۹۵۴۰)	(۳/۶۵۴, ۴/۲۱۴, ۰/۷۵۹۵۴۰)	(۴/۰۷۴, ۴/۲۸۶, ۰/۷۵۹۵۴۰)
۱	۲۵	(۳/۹۶۸, ۴/۲۸۴, ۰/۸۸۵۹۹۰)	(۴/۱۳۳, ۴/۴۹۸, ۰/۸۷۸۵۱۱)	(۳/۸۴۷, ۴/۶۲۳, ۰/۸۹۱۶۲۰)
	۳۰	(۳/۹۳۳, ۴/۲۳۹, ۰/۷۷۲۱۶۶)	(۴/۰۴۵, ۴/۴۱۹, ۰/۷۷۵۵۲۹)	(۴/۱۳۸, ۴/۵۶۴, ۰/۷۷۶۷۶۱)
	۳۵	(۴/۱۶۰, ۴/۲۱۳, ۰/۷۵۵۵۵۳)	(۳/۷۶۹, ۴/۳۵۰, ۰/۷۵۵۶۵۱)	(۴/۰۴۷, ۴/۴۸۵, ۰/۷۵۵۷۱۰)
	۴۰	(۴/۰۱۶, ۴/۱۸۵, ۰/۷۵۷۳۵۶)	(۳/۹۱۶, ۴/۳۱۷, ۰/۷۵۷۳۶۰)	(۴/۱۹۶, ۴/۴۴۳, ۰/۷۵۷۳۶۴)
	۴۵	(۴/۰۱۴, ۴/۱۶۵, ۰/۷۵۹۵۴۱)	(۴/۰۱۸, ۴/۲۹۰, ۰/۷۵۹۵۴۱)	(۴/۰۴۵, ۴/۳۸۹, ۰/۷۵۹۵۴۱)

جدول ۳. میانگین برآوردهای T، T^* و RE تحت تابع زیان آنتروپی برای $p =$ ۲

		δ		
c	n	۱−	۱	۲
۰/۵	۲۵	(۴/۰۹۳, ۴/۳۰۳, ۱/۶۱۱۹)	(۴/۱۳۷, ۴/۳۷۱, ۱/۶۱۱۸)	(۳/۶۸۰, ۴/۳۸۳, ۱/۶۱۱۷)
	۳۰	(۳/۹۸۵, ۴/۲۴۰, ۱/۶۰۳۶)	(۴/۲۸۷, ۴/۳۰۹, ۱/۶۰۳۶)	(۴/۲۱۶, ۴/۳۵۳, ۱/۶۰۳۶)
	۳۵	(۴/۱۸۸, ۴/۱۹۲, ۱/۵۹۷۷)	(۴/۱۱۸, ۴/۲۶۲, ۱/۵۹۷۷)	(۳/۹۱۶, ۴/۲۸۹, ۱/۵۹۷۷)
	۴۰	(۴/۰۷۰, ۴/۱۷۰, ۱/۵۹۳۳)	(۴/۰۳۳, ۴/۲۲۷, ۱/۵۹۳۳)	(۳/۹۵۲, ۴/۲۵۶, ۱/۵۹۳۳)
	۴۵	(۴/۱۲۸, ۴/۱۴۵, ۱/۵۹۰۰)	(۳/۸۳۴, ۴/۱۹۷, ۱/۵۹۰۰)	(۳/۷۵۶, ۴/۲۲۰, ۱/۵۹۰۰)
۰/۷	۲۵	(۴/۱۹۴, ۴/۲۷۶, ۱/۶۱۶۰)	(۴/۰۲۹, ۴/۴۰۹, ۱/۶۱۵۵)	(۴/۰۱۹, ۴/۴۹۳, ۱/۶۱۵۳)
	۳۰	(۴/۱۷۱, ۴/۲۲۴, ۱/۶۰۳۷)	(۳/۶۳۸, ۴/۳۲۶, ۱/۶۰۳۶)	(۳/۷۱۸, ۴/۳۹۵, ۱/۶۰۳۵)
	۳۵	(۴/۰۴۶, ۴/۱۹۱, ۱/۵۹۷۷)	(۳/۷۱۵, ۴/۲۸۳, ۱/۵۹۷۶)	(۳/۸۱۱, ۴/۳۴۸, ۱/۵۹۷۶)
	۴۰	(۳/۹۰۴, ۴/۱۶۴, ۱/۵۹۳۴)	(۳/۹۹۵, ۴/۲۵۷, ۱/۵۹۳۴)	(۳/۹۲۱, ۴/۳۱۴, ۱/۵۹۳۴)
	۴۵	(۳/۹۸۶, ۴/۱۴۶, ۱/۵۹۰۱)	(۴/۰۱۱, ۴/۲۳۰, ۱/۵۹۰۱)	(۴/۱۸۲, ۴/۲۹۵, ۱/۵۹۰۱)
۱	۲۵	(۳/۹۱۳, ۴/۲۹۷, ۲/۲۲۰۱)	(۳/۶۷۴, ۴/۴۷۹, ۲/۱۶۳۱)	(۳/۸۸۰, ۴/۶۳۵, ۲/۱۹۵۰)
	۳۰	(۳/۹۲۲, ۴/۲۴۸, ۱/۶۵۲۰)	(۳/۹۸۴, ۴/۴۲۴, ۱/۶۴۶۹)	(۳/۹۰۴, ۴/۵۴۶, ۱/۶۴۳۴)
	۳۵	(۴/۰۵۵, ۴/۲۱۷, ۱/۶۰۰۰)	(۴/۱۷۹, ۴/۳۷۹, ۱/۵۹۹۷)	(۳/۹۱۵, ۴/۴۷۷, ۱/۵۹۹۲)
	۴۰	(۴/۰۹۸, ۴/۱۹۲, ۱/۵۹۳۴)	(۳/۸۹۷, ۴/۳۲۱, ۱/۵۹۳۳)	(۳/۹۴۴, ۴/۴۲۷, ۱/۵۹۳۲)
	۴۵	(۴/۲۰۲, ۴/۱۷۳, ۱/۵۹۰۰)	(۳/۷۱۸, ۴/۲۷۹, ۱/۵۹۰۰)	(۳/۸۸۶, ۴/۳۷۹, ۱/۵۹۰۰)

جدول ۴. میانگین برآوردهای T، T^* و RE تحت تابع زیان آنتروپی برای $p = ۳$

		δ		
c	n	-۱	۱	۲
	۲۵	(۴/۰۴۹, ۴/۳۲۱, ۱/۳۷۹۸۴)	(۳/۹۲۲, ۴/۳۷۲, ۱/۳۷۹۸۸)	(۳/۹۸۹, ۴/۴۰۶, ۱/۳۷۹۹۱)
	۳۰	(۳/۹۸۲, ۴/۲۳۳, ۱/۳۶۸۴۴)	(۴/۰۱۲, ۴/۳۰۷, ۱/۳۶۸۴۴)	(۳/۷۲۹, ۴/۳۲۶, ۱/۳۶۸۴۴)
۰/۵	۳۵	(۴/۳۲۷, ۴/۲۷۰, ۱/۳۶۰۴۴)	(۳/۷۹۶, ۴/۱۷۴, ۱/۳۶۰۴۴)	(۴/۱۴۳, ۴/۳۰۲, ۱/۳۶۰۴۴)
	۴۰	(۳/۷۸۷, ۴/۱۸۲, ۱/۳۵۴۵۸)	(۴/۲۵۲, ۴/۲۳۳, ۱/۳۵۴۵۸)	(۳/۹۴۱, ۴/۲۵۶, ۱/۳۵۴۵۶)
	۴۵	(۴/۰۳۹, ۴/۱۴۷, ۱/۳۵۰۱۰)	(۴/۰۴۹, ۴/۲۰۳, ۱/۳۵۰۱۰)	(۳/۹۲۲, ۴/۲۲۸, ۱/۳۵۰۱۰)
	۲۵	(۴/۰۸۷, ۴/۲۷۹, ۱/۳۸۳۲۸)	(۴/۱۷۱, ۴/۴۲۰, ۱/۳۸۲۲۲)	(۴/۰۴۹, ۴/۴۹۷, ۱/۳۸۱۱۳)
	۳۰	(۴/۰۱۸, ۴/۲۲۷, ۱/۳۶۸۴۸)	(۴/۱۰۲, ۴/۳۴۸, ۱/۳۶۸۴۴)	(۴/۰۸۲, ۴/۴۲۲, ۱/۳۶۸۴۱)
۰/۷	۳۵	(۴/۴۲۹, ۴/۱۹۶, ۱/۳۶۰۴۴)	(۳/۹۸۵, ۴/۲۹۵, ۱/۳۶۰۴۴)	(۳/۸۴۳, ۴/۳۵۱, ۱/۳۶۰۴۴)
	۴۰	(۳/۸۲۹, ۴/۱۶۶, ۱/۳۵۴۵۸)	(۴/۰۳۷, ۴/۲۶۰, ۱/۳۵۴۵۸)	(۴/۰۳۰, ۴/۳۲۱, ۱/۳۵۸۵۸)
	۴۵	(۳/۸۴۵, ۴/۱۴۵, ۱/۳۵۰۱۰)	(۳/۸۶۰, ۴/۲۲۶, ۱/۳۵۰۱۰)	(۴/۰۴۸, ۴/۲۸۸, ۱/۳۵۰۱۰)
	۲۵	(۳/۹۸۸, ۴/۳۰۳, ۱/۹۳۱۸۷)	(۳/۶۶۲, ۴/۴۸۱, ۱/۸۶۶۴۵)	(۴/۰۱۲, ۴/۶۵۱, ۱/۸۷۶۲۳)
	۳۰	(۴/۰۰۱, ۴/۲۵۲, ۱/۴۰۸۱۲)	(۴/۰۶۷, ۴/۴۳۲, ۱/۴۰۵۵۳)	(۳/۸۱۶, ۴/۵۳۸, ۱/۳۹۹۶۳)
۱	۳۵	(۳/۶۴۰, ۴/۲۰۸, ۱/۳۶۲۱۳)	(۴/۰۴۸, ۴/۳۷۳, ۱/۳۶۱۸۹)	(۳/۹۷۸, ۴/۴۸۴, ۱/۳۶۱۶۱)
	۴۰	(۳/۹۷۲, ۴/۱۹۰, ۱/۳۵۴۶۲)	(۴/۱۰۵, ۴/۳۳۳, ۱/۳۵۴۶۰)	(۴/۰۹۹, ۴/۴۴۰, ۱/۳۵۴۵۹)
	۴۵	(۳/۸۴۶, ۴/۱۶۷, ۱/۳۵۰۱۰)	(۴/۱۰۲, ۴/۲۹۹, ۱/۳۵۰۰۹)	(۳/۹۸۰, ۴/۳۸۷, ۱/۳۵۰۰۹)

جدول ۵. میانگین برآوردهای T، $\hat{\theta}_{EB}$ و RE تحت تابع زیان آنتروپی عمومی برای $p = -۰/۵$

		δ		
c	n	-۱	۱	۲
	۲۵	(۳/۹۹۳, ۳/۸۱۱, ۰/۴۴۳۲۶۳۹)	(۳/۹۸۸, ۳/۸۰۵, ۰/۴۳۲۶۳۷)	(۴/۰۰۸, ۳/۸۲۳, ۰/۴۳۲۶۴۵)
	۳۰	(۳/۹۶۳, ۳/۸۱۳, ۰/۴۸۲۵۹۱)	(۳/۹۸۴, ۳/۸۳۱, ۰/۴۸۲۵۹۱)	(۴/۰۰۴, ۳/۸۴۸, ۰/۴۸۲۵۹۱)
۰/۵	۳۵	(۳/۹۸۶, ۳/۸۵۳, ۰/۵۲۷۰۷۰)	(۴/۰۲۰, ۳/۸۸۳, ۰/۵۲۷۰۷۰)	(۴/۰۰۱, ۳/۸۶۶, ۰/۵۲۷۰۷۰)
	۴۰	(۴/۰۰۷, ۳/۸۸۸, ۰/۵۶۵۷۲۶)	(۳/۹۹۱, ۳/۸۷۳, ۰/۵۶۵۷۲۶)	(۴/۰۰۹, ۳/۸۸۹, ۰/۵۶۵۷۲۶)
	۴۵	(۳/۹۹۷, ۳/۸۹۱, ۰/۵۹۹۹۰۳)	(۳/۹۷۷, ۳/۸۷۴, ۰/۵۹۹۹۰۲)	(۳/۹۹۶, ۳/۸۹۱, ۰/۵۹۹۹۰۲)
	۲۵	(۳/۹۸۴, ۳/۶۷۴, ۰/۴۰۵۰۱۷)	(۳/۹۸۷, ۳/۶۷۶, ۰/۴۰۵۰۰۷)	(۴/۰۲۹, ۳/۷۰۹, ۰/۴۰۷۶۱۵)
	۳۰	(۴/۰۳۲, ۳/۷۵۹, ۰/۴۱۳۰۳۰)	(۳/۹۷۴, ۳/۷۱۱, ۰/۴۱۳۰۷۵	(۳/۹۸۸, ۳/۷۲۳, ۰/۴۱۳۰۹۴)
۰/۷	۳۵	(۴/۰۰۳, ۳/۶۵۸, ۰/۴۴۲۲۲۴)	(۳/۹۸۸, ۳/۷۵۷, ۰/۴۴۲۲۲۴)	(۳/۹۸۴, ۳/۷۵۴, ۰/۴۴۲۲۲۵)
	۴۰	(۴/۰۰۲, ۳/۹۷۶, ۰/۴۸۰۷۷۱)	(۴/۰۰۴, ۳/۷۹۷, ۰/۴۸۰۷۱۷)	(۳/۹۸۷, ۳/۷۸۱, ۰/۴۸۰۷۷۱)
	۴۵	(۳/۹۷۵, ۳/۹۷۴, ۰/۵۱۴۹۴۷)	(۴/۰۰۷, ۳/۸۲۲, ۰/۵۱۴۹۴۷)	(۴/۰۰۶, ۳/۸۲۰, ۰/۵۱۴۹۴۷)
	۲۵	(۴/۰۱۳, ۳/۶۹۸, ۰/۴۱۱۱۲۳)	(۴/۰۰۲, ۳/۶۸۸, ۰/۴۱۰۲۳۱)	(۴/۰۰۷, ۳/۶۸۶, ۰/۴۱۱۲۲۱)
	۳۰	(۳/۹۹۳, ۴/۲۳۹, ۰/۴۱۳۲۰۸)	(۴/۰۲۰, ۳/۷۴۹, ۰/۴۱۳۰۲۲)	(۴/۰۱۱, ۳/۷۴۲, ۰/۴۱۳۲۱۸)
۱	۳۵	(۳/۹۹۹, ۳/۷۶۶, ۰/۴۴۲۲۲۳)	(۴/۰۰۳, ۳/۷۷۰, ۰/۴۴۲۲۲۲)	(۴/۰۰۳, ۳/۷۷۰, ۰/۴۴۲۲۲۳)
	۴۰	(۴/۰۱۹, ۳/۸۱۱, ۰/۴۸۰۷۱۷)	(۳/۹۸۹, ۳/۷۸۴, ۰/۴۸۰۷۱۷)	(۳/۹۷۸, ۳/۷۷۶, ۰/۴۸۰۷۷۱)
	۴۵	(۳/۹۹۹, ۳/۸۱۵, ۰/۵۱۴۹۴۷)	(۳/۹۹۸, ۳/۸۱۳, ۰/۵۱۴۹۴۷)	(۳/۹۹۴, ۳/۸۰۹, ۰/۵۱۴۹۴۷)

جدول ۶. میانگین برآوردهای T، $\hat{\theta}_{EB}$ و RE تحت تابع زیان آنتروپی عمومی برای $p = -۲/۵$

		δ		
c	n	−۱	۱	۲
۰/۵	۲۵	(۴/۰۱۲, ۳/۹۷۳, ۰/۸۳۶۸۵۰)	(۳/۹۸۷, ۳/۹۵۲, ۰/۸۳۶۹۵۳)	(۳/۹۵۱, ۳/۹۱۹, ۰/۸۳۶۸۵۵)
	۳۰	(۳/۹۹۰, ۳/۹۶۰, ۰/۹۳۲۶۱۰)	(۴/۰۱۰, ۳/۹۷۸, ۰/۹۳۲۶۱۰)	(۳/۹۷۷, ۳/۹۴۸, ۰/۹۳۲۶۱۱)
	۳۵	(۴/۰۰۵, ۳/۹۷۷, ۱/۰۱۴۵۱۲)	(۴/۰۲۱, ۳/۹۹۲, ۱/۰۱۴۵۱۲)	(۴/۰۱۲, ۳/۹۸۴, ۱/۰۱۴۵۱۲)
	۴۰	(۳/۹۹۱, ۳/۹۶۷, ۱/۰۸۵۹۴۳)	(۴/۰۱۸, ۳/۹۹۳, ۱/۰۸۵۹۴۳)	(۴/۰۲۷, ۴/۰۰۹, ۱/۰۸۵۹۴۳)
	۴۵	(۳/۹۹۲, ۳/۹۷۰, ۱/۱۴۹۲۸۱)	(۳/۹۸۱, ۳/۹۶۱, ۱/۱۴۹۲۸۱)	(۴/۰۰۹, ۳/۹۸۷, ۱/۱۴۹۲۸۱)
۰/۷	۲۵	(۴/۰۳۱, ۳/۸۵۵, ۰/۸۰۳۳۲۱)	(۳/۹۹۶, ۳/۸۲۶, ۰/۸۰۲۴۰۵)	(۴/۰۰۱, ۳/۸۳۲, ۰/۸۰۳۵۵۹)
	۳۰	(۳/۹۸۵, ۳/۸۵۹, ۰/۸۵۳۴۶۹)	(۳/۹۹۰, ۳/۸۶۴, ۰/۸۵۳۴۷۰)	(۴/۰۰۳, ۳/۸۷۴, ۰/۸۵۳۴۷۰)
	۳۵	(۴/۰۰۴, ۳/۸۹۱, ۰/۹۲۴۸۹۳)	(۳/۹۹۱, ۳/۸۷۹, ۰/۹۲۴۸۹۳)	(۳/۹۸۹, ۳/۸۷۷, ۰/۹۲۴۸۹۳)
	۴۰	(۴/۰۰۰, ۳/۸۹۹, ۰/۹۸۸۲۳۱)	(۳/۹۴۲, ۴/۱۵۰, ۰/۹۸۸۲۳۱)	(۴/۰۱۶, ۳/۹۱۲, ۰/۹۸۸۲۳۱)
	۴۵	(۴/۰۰۶, ۳/۹۱۴, ۱/۱۴۵۰۲۵)	(۳/۹۸۶, ۴/۲۱۴, ۱/۱۴۵۰۲۵)	(۳/۹۹۳, ۳/۹۰۲, ۱/۱۴۵۰۲۵)
۱	۲۵	(۴/۰۰۲, ۳/۵۹۴, ۱/۶۳۱۷۸۹)	(۴/۰۰۱, ۳/۵۹۴, ۱/۶۳۱۷۸۲)	(۳/۹۸۱, ۳/۵۹۰, ۱/۶۳۱۷۸۲)
	۳۰	(۴/۰۰۳, ۳/۶۵۱, ۲/۶۹۸۳۴۴)	(۴/۰۰۳, ۳/۶۴۹, ۲/۶۹۸۳۴۱)	(۳/۹۳۱, ۳/۶۰۱, ۲/۶۹۸۳۴۱)
	۳۵	(۳/۹۷۶, ۳/۶۷۱, ۲/۷۲۶۲۲۶)	(۴/۰۰۱, ۳/۶۹۲, ۲/۷۲۶۲۱۶)	(۴/۰۸۵, ۳/۷۵۹, ۲/۷۲۶۲۱۶)
	۴۰	(۳/۹۹۰, ۳/۷۱۵, ۲/۷۴۱۳۲۳)	(۳/۹۹۹, ۳/۷۲۲, ۲/۷۴۱۳۲۳)	(۳/۹۴۲, ۳/۶۷۶, ۲/۷۴۱۳۲۳)
	۴۵	(۳/۹۹۱, ۳/۷۴۲, ۳/۷۲۱۵۴۱)	(۳/۹۸۸, ۳/۷۴۰, ۳/۷۲۱۵۴۱)	(۳/۸۲۴, ۳/۵۹۸, ۳/۷۲۱۵۴۱)

جدول ۷. میانگین برآوردهای T، $\hat{\theta}_{EB}$ و RE تحت تابع زیان آنتروپی عمومی برای $p = ۲$

		δ		
c	n	−۱	۱	۲
۰/۵	۲۵	(۴/۰۱۳, ۳/۸۷۵, ۱/۵۷۲۲۶۳)	(۳/۹۶۶, ۳/۴۸۲, ۱/۷۰۲۰۰۳)	(۳/۸۴۸, ۳/۵۱۱, ۱/۵۷۳۱۵۶)
	۳۰	(۳/۹۸۸, ۳/۵۷۱, ۱/۷۹۶۶۲۵)	(۴/۰۱۸, ۳/۵۹۵, ۱/۷۹۹۶۹۰)	(۳/۹۷۷, ۳/۶۶۸, ۱/۷۹۶۷۰۴)
	۳۵	(۳/۹۹۹, ۳/۶۳۵, ۱/۹۷۳۴۹۲)	(۳/۸۵۶, ۳/۶۰۳, ۱/۹۷۳۴۹۲)	(۳/۹۹۶, ۳/۹۳۱, ۱/۹۷۳۴۹۲)
	۴۰	(۴/۰۰۷, ۳/۶۸۳, ۲/۱۲۶۲۲۵)	(۴/۰۵۷, ۴/۲۲۷, ۱/۵۹۳۳)	(۳/۸۲۵, ۳/۶۰۷, ۲/۱۲۶۲۲۵)
	۴۵	(۴/۰۰۰, ۳/۷۱۱, ۱/۲۶۰۷۲۴)	(۳/۹۹۱, ۳/۷۷۶, ۲/۲۶۰۷۲۴)	(۳/۸۳۵, ۳/۶۴۰, ۲/۲۶۰۷۲۴)
۰/۷	۲۵	(۳/۹۶۶, ۳/۴۸۳, ۱/۳۹۸۷۵۹)	(۴/۰۲۹, ۴/۴۰۹, ۱/۳۹۸۷۵۰)	(۴/۰۱۹, ۴/۴۹۳, ۱/۳۹۸۷۶۱)
	۳۰	(۴۰۱۸, ۳/۵۹۵, ۱/۳۹۹۰۹۳)	(۳/۶۳۸, ۳/۶۲۴, ۱/۳۹۹۰۹۳)	(۳/۷۱۸, ۴/۳۹۵, ۱/۳۹۹۰۹۳)
	۳۵	(۳/۹۸۵, ۳/۶۲۴, ۱/۶۴۸۱۴۲)	(۳/۹۸۷, ۴/۲۸۳, ۱/۶۴۸۱۴۲)	(۴/۰۰۱, ۴/۳۴۸, ۱/۶۴۸۱۴۲)
	۴۰	(۴/۰۰۴, ۳/۶۸۱, ۱/۸۰۱۶۳۱)	(۳/۹۹۵, ۴/۲۵۷, ۱/۸۰۱۶۳۱)	(۳/۹۲۱, ۴/۳۱۴, ۱/۸۰۱۶۳۱)
	۴۵	(۳/۹۸۶, ۳/۷۰۰, ۱/۹۳۶۱۳۴)	(۴/۰۱۱, ۴/۲۳۰, ۱/۹۳۶۱۳۴)	(۴/۱۸۲, ۴/۲۹۵, ۱/۹۳۶۱۳۴)
۱	۲۵	(۴/۰۰۱, ۳/۲۹۲, ۱/۷۱۷۰۰۲)	(۳/۹۹۳, ۳/۲۸۷, ۱/۸۸۸۷۶۹)	(۳/۸۸۰, ۴/۶۳۵, ۱/۸۶۴۳۷۱)
	۳۰	(۴/۰۱۲, ۳/۳۹۸, ۲/۰۱۲۶۳۷)	(۳/۹۹۸, ۳/۳۸۸, ۲/۴۰۴۶۶۸)	(۳/۹۹۵, ۳/۳۸۶, ۲/۵۷۶۰۴۷)
	۳۵	(۴/۰۰۴, ۳/۴۶۷, ۲/۴۲۴۴۴۲)	(۴/۰۰۰, ۳/۴۶۴, ۲/۸۳۸۷۵۹)	(۳/۹۸۸, ۳/۴۵۵, ۲/۸۳۳۸۴۶)
	۴۰	(۴/۰۰۸, ۳/۵۲۸, ۳/۰۸۷۶۱۲)	(۳/۹۸۵, ۳/۵۱۱, ۳/۰۸۰۳۴۴)	(۴/۰۰۴, ۳/۵۲۵, ۳/۰۹۳۹۴۱)
	۴۵	(۴/۰۰۰, ۳/۲۷۳, ۳/۹۵۴۶۳۴)	(۴/۰۰۰, ۳/۵۶۹, ۳/۴۵۴۷۱۹)	(۴/۰۰۷, ۳/۵۷۵, ۳/۴۵۴۶۰۴)

جدول ۸. میانگین برآوردهای T، $\hat{\theta}_{EB}$ و RE تحت تابع زیان آنتروپی عمومی برای $p = ۳$

		δ		
c	n	-۱	۱	۲
۰/۵	۲۵	(۳/۹۸۴, ۳/۵۱۵, ۱/۲۹۴۶۶۶)	(۴/۰۶۴, ۳/۶۰۶, ۱/۲۹۹۴۴۷)	(۳/۹۷۶, ۳/۵۳۵, ۱/۲۹۸۸۰۵)
	۳۰	(۴/۰۱۲, ۳/۶۳۴, ۱/۴۹۵۷۹۲)	(۳/۹۰۰, ۳/۵۴۳, ۱/۴۹۵۷۹۷)	(۳/۸۷۳, ۳/۵۱۹, ۱/۴۹۵۷۹۳)
	۳۵	(۳/۹۶۲, ۳/۶۴۳, ۱/۶۴۷۰۸۱)	(۳/۹۴۵, ۳/۶۳۱, ۱/۶۴۷۰۸۱)	(۳/۹۵۹, ۳/۶۴۱, ۱/۶۴۷۰۸۱)
	۴۰	(۴/۰۷۶, ۳/۷۸۰, ۱/۷۷۷۴۴۸)	(۴/۰۰۱, ۳/۷۱۴, ۱/۷۷۷۴۴۸)	(۳/۹۸۱, ۳/۶۹۸, ۱/۷۷۷۴۴۸)
	۴۵	(۳/۹۵۵, ۳/۷۰۵, ۱/۸۹۲۰۵۳)	(۴/۰۵۰, ۳/۷۸۸, ۱/۸۹۲۰۵۳)	(۳/۹۱۱, ۳/۶۶۶, ۱/۸۹۲۰۵۳)
۰/۷	۲۵	(۳/۹۷۴, ۳/۴۱۵, ۱/۱۴۸۳۵۹)	(۴/۰۱۳, ۳/۴۴۴, ۱/۱۴۸۸۷۵)	(۳/۹۸۷, ۳/۵۸۱, ۱/۱۴۸۶۳۸)
	۳۰	(۳/۹۸۴, ۳/۵۰۷, ۱/۳۷۲۹۸۶)	(۳/۹۹۲, ۳/۵۱۴, ۱/۳۷۲۹۸۳)	(۳/۹۹۷, ۳/۵۱۷, ۱/۳۷۲۹۷۱)
	۳۵	(۳/۹۸۹, ۳/۵۷۴, ۱/۳۹۵۸۵۴)	(۴/۰۰۲, ۳/۵۸۴, ۱/۴۰۰۱۶۷)	(۳/۹۹۸, ۳/۵۸۱, ۱/۳۹۱۱۶۹)
	۴۰	(۳/۹۹۳, ۳/۶۲۵, ۱/۵۰۴۲۳۰)	(۳/۹۹۹, ۳/۶۲۹, ۱/۵۰۴۲۳۰)	(۴/۰۰۵, ۳/۶۳۴, ۱/۵۰۴۲۳۰)
	۴۵	(۳/۹۹۷, ۳/۶۶۶, ۱/۶۱۸۸۴۰)	(۳/۹۹۶, ۳/۶۶۵, ۱/۶۱۸۸۴۰)	(۳/۹۹۱, ۳/۶۶۱, ۱/۶۱۸۸۴۰)
۱	۲۵	(۳/۹۷۴, ۳/۲۰۷, ۲/۵۲۳۴۳۸)	(۳/۹۹۶, ۳/۲۲۱, ۲/۵۱۹۱۸۵۸)	(۳/۹۸۶, ۳/۲۱۵, ۲/۵۱۹۱۸۵۰)
	۳۰	(۴/۰۱۵, ۳/۳۴۲, ۲/۸۹۷۴۴۲)	(۴/۰۰۲, ۳/۳۳۲, ۲/۸۰۳۴۶۴)	(۳/۹۸۷, ۳/۳۲۳, ۲/۸۰۳۴۶۴)
	۳۵	(۳/۹۹۲, ۳/۴۰۷, ۲/۹۹۳۶۷۳)	(۴/۰۰۳, ۳/۴۱۶, ۲/۹۶۰۳۹۳)	(۳/۹۹۷, ۳/۴۱۲, ۲/۹۶۰۳۹۳)
	۴۰	(۴/۰۰۳, ۳/۴۷۹, ۳/۰۱۷۰۴۲)	(۴/۰۰۴, ۳/۴۸۰, ۳/۰۱۴۰۷۳)	(۳/۹۹۱, ۳/۴۷۰, ۳/۰۱۷۰۴۲)
	۴۵	(۳/۹۸۴, ۳/۵۱۶, ۳/۲۰۹۱۸۷)	(۴/۰۰۷, ۳/۵۳۴, ۳/۲۰۹۲۹۱)	(۴/۰۰۴, ۳/۵۳۲, ۳/۲۰۹۲۹۱)

جدول ۹. مقادیر برآورد T، T^*، $\hat{\theta}_{EB}$ و کاراییهای نسبی مربوطه برای دادههای مربوط به خرابی سیستم تهویه هوای هواپیما

		برآوردها				
p	δ	T	T^*	$\hat{\theta}_{EB}$	$RE(T,T^*)$	$RE(T,\hat{\theta}_{EB})$
$-۱/۵$	-۱	۹۵۱/۱۶۰۱	۸۸۷/۷۵۱۵	۹۵۵/۷۳۷۴	۰/۹۰۳۹۹۵	۰/۹۳۹۶۸۷
	۱	۹۵۱/۱۵۹۹	۸۸۷/۷۵۱۵	۹۵۹/۹۴۹۹	۰/۹۰۳۹۹۵	۰/۹۳۹۶۸۷
	۲	۹۵۱/۱۵۹۹	۸۸۷/۷۵۱۵	۹۵۷/۲۳۹۸	۰/۹۳۹۶۸۷	۰/۹۴۴۵۳۱
۲	-۱	۹۵۰/۱۹۸۷	۸۸۷/۷۵۱۵	۸۹۷/۰۰۶	۱/۰۶۹۶۰۰	۱/۲۰۲۵۸۱
	۱	۹۵۱/۱۵۹۹	۸۸۷/۷۵	۹۳۹/۲۸۵۲	۱/۰۶۹۶۰۰	۱/۳۷۳۱۷۰
	۲	۹۵۱/۱۵۹۹	۸۸۷/۷۵	۸۵۵/۸۶۶۳	۱/۰۶۹۶۰۰	۱/۴۴۳۹۴۱

مراجع

[1] Al-Hemyari, Z.A. and Al-Dabag, H.A. (2012), A Class of Shrinkage Testimators for the Shape Parameter of the Weibull Lifetime Model, *Pakistan Journal of Statistics and Operational Research*, **8(2)**, 167-184.

[2] Berger, J.O. (1985), *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, second ed., Springer-Verlag, New York.

[3] Calabria, R. and Pulcini, G. (1996), Point Estimation under Asymmetric Loss Functions for LeftTruncated Exponential Samples, *Communications in Statistics-Theory & Methods*, **25(3)**, 585-600.

[4] Dey, D.K., Ghosh, M. and Srinivasan, C. (1987), Simultaneous Estimation of Parameters under Entropy Loss, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **15**, 347-363.

[5] Dey, D.K and Liu, P.L. (1992), On Comparison of Estimators in a Generalized Life Model, *Microelectronics Reliability*, **32**, 207-221.

[6] Gharraph, M.K. (1993), Comparison of Estimators of Location Measures of an Inverse Rayleigh Distribution, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **37**, 295-309.

[7] Guobing, F. (2015), Bayes Estimation for Inverse Rayleigh Model under Different Loss Functions, *Journal of Applied Science, Engineering and Technology*, **9(12)**, 1115-1118.

[8] Han, M. (1997), The Structure of Hierarchical Prior Distribution and its Applications, *Chinese Operations Research and Management Science*, **6(3)**, 31-40.

[9] Han, M. (2009), E-Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of Failure Rate, *Applied Mathematical Modelling*, **33(4)**, 1915-1922.

[10] Han, M. (2011), E-Bayesian Estimation of the Reliability derived from Binomial distribution, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 2419-2424.

[11] Harris, E. and Shakarki, G. (1979), Use of the Population Distribution to Improve Estimation of Individual Mean in Epidemiological Studies, *Journal of Chronical Disease*, **32**, 233-243.

[12] Jaheen, Z.F. and Okasha, H.M. (2011), E-Bayesian Estimation for the Burr type XII Model Based on Type-2 Censoring, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 4730-4737.

[13] Keller, A. and Kamath, A. (1982), Alternate Reliability Models for Mechanical Systems, *ESA-Reliability and Maintainability*, **83**, 10-38.

[14] Khan, M.S. and King R. (2015), Transmuted Modified Inverse Rayleigh Distribution, *Austrian Journal of Statistics*, **44**, 17-29.

[15] Kiapour, A. (2018), Classic and Bayes Shrinkage Estimation in Rayleigh Distribution Using a Point Guess Based on Censored Data, *Mathematical Researches*, **4(1)**, 63-74.

[16] Maleki Jebelya, F., Zareaand, K. and Deiri, E. (2018), Efficient estimation of the PDF and the CDF of the inverse Rayleigh distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **88**, 75-88.

[17] Marshall, R.J. (1991), Mapping Disease and Mortality Rates using Empirical Bayes Estimators, *Journal of Applied Statistics*, **40**, 283-294.

[18] Proschan, F. (1963), Theoretical Explanation of Observed Decreasing Failure Rate, *Technometrics*, **5**, 375-383.

[19] Prakash, G. and Singh, D.C. (2006), Shrinkage Testimators for the Inverse Dispersion of the Inverse Gaussian Distribution under the LINEX Loss Function, *Austrian Journal of Statistics*, **35(4)**, 463-470.

[20] Prakash, G. (2009), Some Estimators for the Pareto Distribution, *Journal of Scientific Research*, **1(2)**, 236,247.

[21] Roges, D.L. (2014), The Kumaraswamy Inverse Rayleigh Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **84**, 39–290.

[22] Singh, D.C., Prakash, G. and Singh, P. (2007), Shrinkage Testimators for the Shape Parameter of Pareto Distribution using the LINEX Loss Function, *Communication in Statistics – Theory and Methods*, **36(4)**, 741-753.

[23] Singh, G.P., Singh, S.K., Singh, U. and Upadhyay, S.K (2008), Bayes Estimators of Exponential Parameters from a Censored Sample using a Guess Estimate, *Data Science Journal*, **7**, 106-114.

[24] Soliman, A., Essam, A.A. and AlaaAbd-El-Aziz, A. (2010), Estimation and Prediction from Inverse Rayleigh Distribution based on Lower Record values, *Applied Mathematical Sciences*, **4(2)**, 3057-3066.

[25] Salman, A.N. and Shareef, R.A. (2014), Bayesian Shrinkage Estimator for the Scale Parameter of Exponential Distribution under Improper Prior Distribution, *International Journal of Statistics and Applications*, 4(3), 135-143.

[26] Treyer, V.N. (1964), *Doklady Acad, Nauk, Belorus*, U.S.S.R.

[27] Thompson, J.R. (1968), Some Shrinkage Techniques for Estimating the Mean, *Journal of American Statistical Association*, **63**, 113-122.

[28] Tso, G. (1990), Forecasting Money Supply in Hong Kong with a Multiple Shrinkage Estimator, Proceeding of the ASA Section on Business and Commerce.

[29] Wooff, D.A. (1985), Bounds on Reciprocal Moments with Applications and Developments in Stein Estimation and Post Stratification, *Journal of Royal Statistical Society*,**47**, 362-371.

[30] Wang, J., Li, D. and Chen, D. (2012), E Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of the System Reliability Parameter, *Systems Engineering Procedia*, **3**, 282-289.

[31] Yousefzadeh, F. (2017), E-Bayesian and Hierarchical Bayesian Estimations for the System Reliability Parameter based on Asymmetric Loss Function, *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **46(1)**, 1–8.

[32] Yaghoobzadeh, S.S. (2018), Estimating E-Bayesian and Hierarchical Bayesian of Scaler Parameter of Gompertz Distribution under Type-II Censoring Schemes Based on Fuzzy Data, *Communications in Statistics—Theory and Methods*. doi: org/10. 1080/03610926.2017.1417438.

[33] Yaghoobzadeh, S.S. (2018), Estimate $R = P(X > Y)$ in Exponential Distribution, Based on E-Bayesian and Hierarchical Bayesian Methods, *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, **8(1)**, 49-64.

[34] Zellner, A. (1986), Bayesian Estimation and Prediction using Asymmetric Loss Function, *Journal of American statistical Association*, **81**, 446-451.