رفتار توابع قابلیت اعتماد و ترتیب‌های تصادفی در خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی

زهرا نیکنام [۱] ، محمدرضا کاظمی [۲]

تاریخ دریافت: ۹۷/۱۲/۳

تاریخ پذیرش: ۹۹/۳/۱

چکیده:

توزیع کاماراسوامی [۳] یک توزیع دو پارامتری روی بازه $(\circ, ۱)$ است که بسیار شبیه به توزیع بتاست. این توزیع اغلب مدلی مناسب برای متغیرهای تصادفی هستند که بین دو کران متناهی یعنی یک کران بالا و یک کران پایین تغییر می‌کنند، مانند نسبت افرادی از جامعه که در یک‌فاصله‌ی زمانی معین فرآورده‌ی خاصی را مصرف می‌کنند. در این مقاله، ضمن معرفی خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی رفتار توابع قابلیت اعتماد مانند توابع نرخ خطر، نرخ خطر معکوس، میانگین باقی‌مانده عمر و گذشته‌ی عمر در آن‌ها را موردمطالعه قرار می‌دهیم. همچنین ترتیب‌های تصادفی را در خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی بررسی می‌کنیم. درنهایت در قالب یک مثال کاربردی، قابلیت برازش توزیع کاماراسوامی را در داده‌های واقعی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: تابع نرخ خطر، ترتیب‌های تصادفی، قابلیت اعتماد، لگ مقعر، میانگین باقی‌مانده عمر، نرخ خطر معکوس.

۱ مقدمه

بحث قابلیت اعتماد، یکی از مباحث علوم آماری است که در صنعت بسیار موردتوجه قرارگرفته است. همچنین کاربردهایی از آن در زمینه‌های مهندسی، پزشکی و اقتصاد به چشم می‌خورد. در متون قابلیت اعتماد بررسی سیستم‌ها و مطالعه طول عمر آن‌ها حائز اهمیت است. معیارهای مختلفی برای مطالعه‌ی طول عمر سیستم‌ها و مقایسه آن‌ها با یکدیگر مطرح‌شده است که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به توابع قابلیت اعتماد، نرخ خطر، نرخ خطر معکوس، میانگین باقی‌مانده طول عمر، میانگین گذشته‌ی طول عمر و ترتیب‌های تصادفی اشاره کرد. توزیع کاماراسوامی اغلب مدلی مناسب برای متغیرهای تصادفی است که بین دو کران متناهی یعنی یک کران بالا و یک کران پایین تغییر می‌کنند، مانند نسبت افرادی از جامعه که در یک فاصله زمانی معین فرآورده خاصی را مصرف می‌کنند، یا درصد کل سطح مزارع زیر کشت هندوانه، یا فاصله نقطه شکستگی درختی از یک سر آن در اثر یک طوفان سخت، قد افراد، نمرات به‌دست‌آمده از یک آزمون، داده‌های اقتصادی مانند داده‌های بیکاری و...، داده‌های هیدرولوژیکی مانند بارش روزانه، دمای اتمسفر. ازآنجاکه توزیع کاماراسوامی جایگزین بهتری برای توزیع بتا تلقی می‌شود در بسیاری از مقالات در ادبیات تحقیق هیدرولوژی از این توزیع استفاده می‌کنند. کاماراسوامی [۹] و پونامبالم و همکاران [۱۶] نشان دادند که بسته به انتخاب پارامترهای α و β توزیع کاماراسوامی، این توزیع برای تقریب توزیع‌های بسیاری مانند توزیع یکنواخت، مثلثی یا تقریباً هر توزیع تک-مدی [۴] مورداستفاده قرار می‌گیرد. جونز [۷] به بررسی خواص اساسی این توزیع مانند چولگی، کشیدگی و برآورد حداکثر درستنمایی پارامترهای آن و همچنین به بیان خلاصه‌ای از شباهت‌ها و تفاوت‌های توزیع کاماراسوامی و بتا پرداخت. با فرض اینکه $G(x)$ تابع توزیع تجمعی پیوسته و $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ تابع چگالی احتمال باشد، کوردیرو و دی کاسترو [۳] تابع توزیع تجمعی خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی را به صورت زیر تعریف کردند:

$$F(x) = ۱ - \{۱ - G(x)^{\alpha}\}^{\beta} \quad \alpha, \beta > \circ.$$

که در آن α و β دو پارامتر اضافی برای کنترل چولگی و ایجاد توزیع‌هایی با دم‌های سنگین‌تر هستند. خانواده توزیع‌های

G-کاماراسوامی به دلیل تابع توزیع تجمعی مطلوب می‌تواند به‌طور مؤثر استفاده شود حتی اگر داده‌ها سانسور شده باشند. تابع چگالی احتمال خانواده توزیع‌های G- کاماراسوامی دارای فرم ساده و به صورت زیر است:

$$f(x) = \alpha\beta g(x) G(x)^{\alpha-۱}\{۱ - G(x)^{\alpha}\}^{\beta-۱}, \qquad (۱)$$

یکی از مزایای عمده خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی این است که توانایی برازش به داده‌های چوله را دارد. علاوه بر این، این خانواده دارای

[۱] دانشجوی دکتری آمار دانشگاه اهواز

[۲] استادیار بخش آمار دانشگاه فسا

[3] Kumaraswamy

[4] Single-modal

انعطاف‌پذیری بیشتری است و به‌طور گسترده در بسیاری از رشته‌های مهندسی و زیست‌شناسی مورداستفاده قرار می‌گیرد. کوردیرو و دی کاسترو [۳] به معرفی تعدادی از فرم‌های G-کاماراسوامی پرداختند امّا به بحث روی جزئیات آن‌ها نپرداختند. با در نظر گرفتن $G(x)$ به عنوان تابع توزیع تجمعی نرمال، وایبل، گاما و گامبل به ترتیب توزیع‌های نرمال-کاماراسوامی، وایبل-کاماراسوامی، گاما-کاماراسوامی و گامبل-کاماراسوامی به دست آوردند. علاوه بر این چندین ویژگی توزیع وایبل-کاماراسوامی را معرفی کردند و به این نتیجه رسیدند که مدل انعطاف‌پذیرتر برای تحلیل داده‌های مثبت می‌باشد. ما در این مقاله بر اساس کار آن‌ها رفتار توابع قابلیت اعتماد را در خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی بررسی می‌کنیم. نادر و همکاران [۱۳] به تجزیه و تحلیل آماری توزیع کاماراسوامی بر اساس داده‌های رکورد پرداختند. کوردیرو و ناداراجا [۴] به بررسی ویژگی‌های ریاضی توزیع گامبل-کاماراسوامی پرداختند و برآورد حداکثر درستنمایی و بیزی پارامترهای آن را به دست آوردند.

وانگ و همکاران [۱۹]، استنباط‌هایی در مورد توزیع کاماراسوامی انجام دادند و برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای برای پارامترهای این توزیع به دست آوردند. آل-فتاح و همکاران [۱] به معرفی توزیع کاماراسوامی معکوس پرداختند و ویژگی‌های آن را موردبررسی قراردادند مدل تنش-مقاومت برای این توزیع به دست آوردند. کایال [۸] به مقایسه تصادفی سری و سیستم‌های موازی شامل خانواده توزیع‌شده G -کاماراسوامی پرداخت. در بخش بعدی به تعاریف و مفاهیم مقدماتی که در این مقاله به آن‌ها نیاز داریم، می‌پردازیم. در بخش ۳، رفتار توابع قابلیت اعتماد مانند توابع نرخ خطر، نرخ خطر معکوس، میانگین باقی‌مانده عمر و گذشته‌ی عمر در خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی را مطالعه می‌کنیم. در بخش ۴، ترتیب‌های تصادفی را در خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی بررسی می‌کنیم. در بخش ۵، قابلیت توزیع کاماراسوامی را در برازش به داده‌های واقعی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. درنهایت نتیجه‌گیری را ارائه می‌دهیم.

۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

قبل از شروع مباحث اصلی نیاز به بیان مفاهیمی مقدماتی است که ابتدا به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

متغیرهای تصادفی بر حسب رفتار تابع نرخ خطرشان به رده‌های مختلفی دسته‌بندی می‌شوند. از این جمله رده‌ها می‌توان به رده توزیع‌ها با نرخ خطر صعودی، رده توزیع‌ها با نرخ خطر نزولی، رده توزیع‌ها با نرخ خطر وانی شکل [۵] و رده توزیع‌ها با نرخ خطر وانی شکل وارون اشاره کرد.

تعریف ۱.۲. فرض کنید F تابع توزیع متغیر تصادفی X باشد. گوییم F (یا X) دارای نرخ خطر نزولی (صعودی) است و با نماد DFR [۶] (IFR [۷]) نشان می‌دهیم اگر $h(x)$، تابع نرخ خطر X، تابعی نزولی (صعودی) از x باشد. گوییم F (یا X) دارای نرخ خطر وانی شکل (وانی شکل وارون) است، اگر $h(x)$ تابعی وانی شکل (وانی شکل وارون) باشد.

رده‌بندی‌های مشابه تابع نرخ خطر، برای توابع نرخ خطر معکوس، میانگین باقی‌مانده عمر و میانگین گذشته‌ی عمر نیز وجود دارد.

تعریف ۲.۲. فرض کنید F تابع توزیع متغیر تصادفی X باشد. گوییم F (یا X) دارای نرخ خطر معکوس نزولی (صعودی) است و با نماد $DRHR$ [۸] ($IRHR$ [۹]) نشان می‌دهیم اگر $h^*(x)$، تابع نرخ خطر معکوس X، تابعی نزولی (صعودی) از x باشد. گوییم متغیر تصادفی F (یا X) دارای نرخ خطر معکوس وانی شکل (وانی شکل وارون) است اگر $h^*(x)$ تابعی وانی شکل (وانی شکل وارون) باشد.

تعریف ۳.۲. فرض کنید F تابع توزیع متغیر تصادفی X باشد. گوییم F (یا X) دارای میانگین باقی‌مانده عمر نزولی (صعودی) است و با نماد $DMRL$ [۱۰] ($IMRL$ [۱۱]) نشان می‌دهیم اگر $m(x)$، تابع میانگین باقی‌مانده عمر X، تابعی نزولی (صعودی) از x باشد. گوییم متغیر تصادفی F (یا X) دارای تابع میانگین باقی‌مانده عمر وانی شکل (وانی شکل وارون) است اگر $m(x)$ تابعی وانی شکل (وانی شکل وارون) باشد.

تعریف ۴.۲. فرض کنید F تابع توزیع متغیر تصادفی X باشد. گوییم F (یا X) دارای میانگین گذشته‌ی عمر نزولی (صعودی) است و با نماد $DMPL$ [۱۲] ($IMPL$ [۱۳]) نشان می‌دهیم اگر $m^*(x)$، تابع میانگین گذشته‌ی عمر X، تابعی

[5] Bathtub-shaped
[6] Decreasing Failure Rate
[7] Increasing Failure Rate
[8] Decreasing Reversed Hazard Rate
[9] Increasing Reversed Hazard Rate
[10] Decreasing Mean Residual Life Testing
[11] Increasing Mean Residual Life Testing
[12] Decreasing Mean Past Life Testing
[13] Increasing Mean Past Life Testing

نزولی (صعودی) از x باشد. گوییم متغیر تصادفی F (یا X) دارای تابع میانگین گذشته‌ی عمر وانی شکل (وانی شکل وارون) است اگر $m^*(x)$ تابعی وانی شکل (وانی شکل وارون) باشد.

لم ۵.۲. فرض کنید X متغیر تصادفی طول عمر باشد:

الف) اگر X دارای نرخ خطر صعودی باشد، آنگاه X دارای نرخ خطر معکوس و میانگین عمر باقی‌مانده نزولی و میانگین گذشته‌ی عمر صعودی است.

ب) اگر X دارای نرخ خطر نزولی باشد، آنگاه X دارای نرخ خطر معکوس و میانگین باقی‌مانده عمر صعودی و میانگین گذشته‌ی عمر نزولی باشد.

ج) اگر X دارای نرخ خطر وانی شکل باشد، آنگاه X دارای نرخ خطر معکوس و میانگین باقی‌مانده عمر وانی شکل وارون و میانگین گذشته‌ی عمر وانی شکل است.

د) اگر X دارای نرخ خطر وانی شکل وارون باشد، آنگاه X دارای نرخ خطر معکوس و میانگین باقی‌مانده عمر وانی شکل و میانگین گذشته‌ی عمر وانی شکل وارون است (می[۱۱]).

لگ مقعر بودن تابع چگالی احتمال: یکی از مفاهیم آماری که با مفاهیم سالخوردگی در قابلیت اعتماد مرتبط است، لگ مقعر بودن تابع چگالی احتمال است. رویدن [۱۷] به بیان لگ مقعر بودن یک تابع حقیقی پرداخته است.

تعریف ۶.۲. تابع غیر منفی $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ لگ مقعر است، اگر به ازای همه $x,y\in\mathbb{R}$ و به ازای $\alpha\in(0,1)$، داشته باشیم $f(\alpha x+(1-\alpha)y)\geq(f(x))^{\alpha}(f(y))^{1-\alpha}$. اگر به ازای همه $x\in\mathbb{R}$، $f(x)>0$، آنگاه تعریف معادل عبارت است از:

$$lnf(\alpha x+(1-\alpha)y)\geq\alpha lnf(x)+(1-\alpha)lnf(y).$$

به عبارت دیگر $-\frac{d^2}{dx^2}lnf(x)\geq 0$ مشروط به اینکه $lnf(x)$ دو بار مشتق پذیر باشد.

لم ۷.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f(x)$ باشد. اگر $f(x)$ لگ مقعر باشد، آنگاه X دارای نرخ خطر صعودی است.

لگ مقعر بودن مینیمم و ماکسیمم مؤلفه‌های توزیع‌های چند متغیره:

فرض کنید $X_1,X_2,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از یک تابع توزیع مطلقاً پیوسته $F(.)$ و تابع چگالی احتمال $f(.)$ باشد. فرض کنید $T_1=Min(X_i),1\leq i\leq n$ و $T_n=Max(X_i)$، $1\leq i\leq n$. در این صورت، نتیجه‌ای معروف است که اگر توزیع اولیه لگ مقعر باشد، T_1 و T_n نیز دارای توزیع لگ مقعر هستند. در واقع، در این حالت هر آماره ترتیبی یک توزیع لگ مقعر دارد. علاوه بر این، اگر توزیع اولیه IFR باشد، آنگاه T_1 نیز IFR است و اگر توزیع اولیه DFR باشد، آنگاه T_n نیز DFR است (آرنولد و همکاران [۲]).

قضیهٔ ۸.۲. فرض کنید بردار تصادفی $\mathbf{X}=(X_1,X_2,...,X_n)$ دارای تابع توزیع مطلقاً پیوسته $F(.)$ و تابع چگالی احتمال $f(.)$ است. در این صورت، اگر بردار تصادفی $\mathbf{X}=(X_1,X_2,...,X_n)$ دارای یک تابع چگالی لگ مقعر باشد، آنگاه T_1 دارای نرخ خطر صعودی و T_n دارای نرخ خطر معکوس نزولی است (هو و لی [۶]).

ترتیب تصادفی: در علم آمار مقایسه توزیع‌های احتمال از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و توجه محققان زیادی را به خود جلب کرده است. ترتیب‌های تصادفی یکی از مهم‌ترین ابزارها در جهت این هدف و همچنین در مطالعه مفاهیم طول عمر می‌باشد که در نیم‌قرن گذشته علاوه بر کاربردهایی در مسائل آماری دارای کاربردهایی در شاخه‌های دیگر نظیر اقتصاد، نظریه قابلیت اعتماد سیستم‌های مهندسی، تحلیل بقا، نظریه صف، آمار بیمه، علوم زیستی، تحقیق در عملیات، اقتصاد و... می‌باشد. در مسئله ترتیب‌بندی‌ها، به مقایسه توزیع چند متغیر یا چند آماره در دو یا چند جامعه می‌پردازند. برای مقایسه دو تابع توزیع، آسان‌ترین راهی که به نظر می‌رسد مقایسه میانگین‌های دو توزیع است که چنین مقایسه‌ای تنها بر اساس دو عدد یعنی میانگین‌ها صورت می‌گیرد که خیلی نمی‌تواند مؤثر واقع گردد. علاوه بر آن در بعضی مواقع مانند توزیع کوشی میانگین وجود ندارد.

برای مقایسه دو تابع توزیع، در بسیاری از موارد اطلاعات جزئی‌تر و بیشتری از داشتن دو میانگین در دسترس می‌باشد. با اثبات وجود ترتیب تصادفی خاص بیان مدل‌های ساده و مدل موردمطالعه، می‌توان کران یا تقریب‌های مناسبی برای مشخصه‌هایی مانند تابع نرخ خطر، تابع میانگین باقی‌مانده عمر و ... از طول عمر قطعه موردبررسی به دست آورد. ایده‌ی ترتیب تصادفی و همچنین مفهوم مرتب کردن توزیع‌ها در ساده‌ترین نوع آن توسط لهمن [۱۰] مطرح گردید. چندین نوع دیگر از ترتیب‌های تصادفی برای مقایسه توزیع‌های احتمال توسط مولر و استویان [۱۲] و شیکد و شانتیکومار [۱۸] معرفی‌شده است. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته به ترتیب با توابع توزیع F و G توابع چگالی، f و g و توابع بقای $\overline{F}=1-F$ و $\overline{G}=1-G$ باشد. در این صورت

الف) X را کوچک‌تر از Y از نظر ترتیب نسبت درستنمایی گویند و آن را با $X\leqslant_{lr}Y$ نمایش می‌دهیم هرگاه X و Y پیوسته به ترتیب با توابع

چگالی f و g باشند و به ازای هر t متعلق به اجتماع تکیه‌گاه‌های X و Y، $\frac{g(t)}{f(t)}$ صعودی باشد.

ب) X را کوچک‌تر از Y از نظر ترتیب نرخ خطر گویند و آن را با $X \leqslant_{hr} Y$ نمایش می‌دهند هرگاه $\frac{\overline{G}(t)}{\overline{F}(t)}$ بر حسب $t \in (-\infty, max(u_X, u_Y))$ صعودی باشد که در آن u_X و u_Y به ترتیب حدود بالای تکیه‌گاه‌های X و Y می‌باشند.

ج) X را کوچک‌تر از Y از نظر ترتیب نرخ خطر معکوس گویند و آن را با نماد $X \leqslant_{rh} Y$ نمایش می‌دهند هرگاه $\frac{G(t)}{F(t)}$ بر حسب $t \in (min(l_X, l_Y), \infty)$ صعودی باشد که در آن l_X و l_Y به ترتیب حدود پایین تکیه‌گاه‌های X و Y می‌باشند.

د) X را کوچک‌تر از Y از نظر ترتیب تصادفی معمولی گویند هرگاه برای هر t، $\overline{F}(t) \leqslant \overline{G}(t)$ و آن را با نماد $X \leqslant_{st} Y$ نمایش می‌دهند.

ه) X را کوچک‌تر از Y از نظر ترتیب میانگین باقی‌مانده عمر گویند و آن را با نماد $X \leqslant_{mrl} Y$ نمایش می‌دهند هرگاه برای هر t، $m_F(t) \leqslant m_G(t)$ که در آن m_F و m_G به ترتیب توابع میانگین باقی‌مانده عمر F و G می‌باشند.

۳ رفتار توابع قابلیت اعتماد در خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی

در این بخش به بررسی رفتار توابع قابلیت اعتماد در حالات خاص خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی می‌پردازیم.
تابع نرخ خطر خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی به صورت زیر است:

$$h(x) = \frac{\alpha\beta g(x)G(x)^{\alpha-1}}{1-G(x)^{\alpha}},$$

اگر $x \to 0$، آنگاه $h(x) \sim \alpha\beta g(x)G(x)^{\alpha-1}$ و اگر $x \to \infty$، آنگاه $h(x) \sim \frac{\alpha\beta g(x)}{1-G(x)^{\alpha}}$.

تابع قابلیت اعتماد خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی عبارت است از:

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x) = (1 - G^{\alpha}(x))^{\beta},$$

۱.۳ توزیع کاماراسوامی

توزیع کاماراسوامی حالت خاصی از خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی است که در این خانواده G دارای توزیع یکنواخت $[0,1]$ است، توزیع کاماراسوامی به دست می‌آید.
گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع کاماراسوامی است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$f(x,\alpha,\beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}, 0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (2)$$

که در آن $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ پارامترهای شکل هستند و با نماد $Kum(\alpha,\beta)$ نمایش می‌دهیم.
تابع توزیع احتمال آن به صورت زیر است:

$$F(x,\alpha,\beta) = 1 - (1-x^{\alpha})^{\beta}.$$

تابع نرخ خطر توزیع کاماراسوامی به صورت زیر است:

$$h(x) = \frac{\alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}}{(1-x^{\alpha})^{\beta}} = \frac{\alpha\beta x^{\alpha-1}}{1-x^{\alpha}},$$

همان‌گونه که مشخص است رفتار تابع نرخ خطر تنها به پارامتر α بستگی دارد و پارامتر دیگر نقشی در آن ندارد. به منظور مطالعه تابع نرخ خطر رفتار مشتق آن را موردبررسی قرار می‌دهیم. در دو حالت $\alpha \geq 1$ و $\alpha < 1$ رفتار تابع نرخ خطر متفاوت است.

قضیهٔ ۱.۳. رفتار تابع نرخ خطر توزیع کاماراسوامی به صورت زیر است:

الف) تابع نرخ خطر به ازای $\alpha \geq 1$ صعودی است.

ب) تابع نرخ خطر به ازای $\alpha < 1$ وانی شکل است.

اثبات الف.
مشتق تابع $h(x)$ به صورت زیر است:

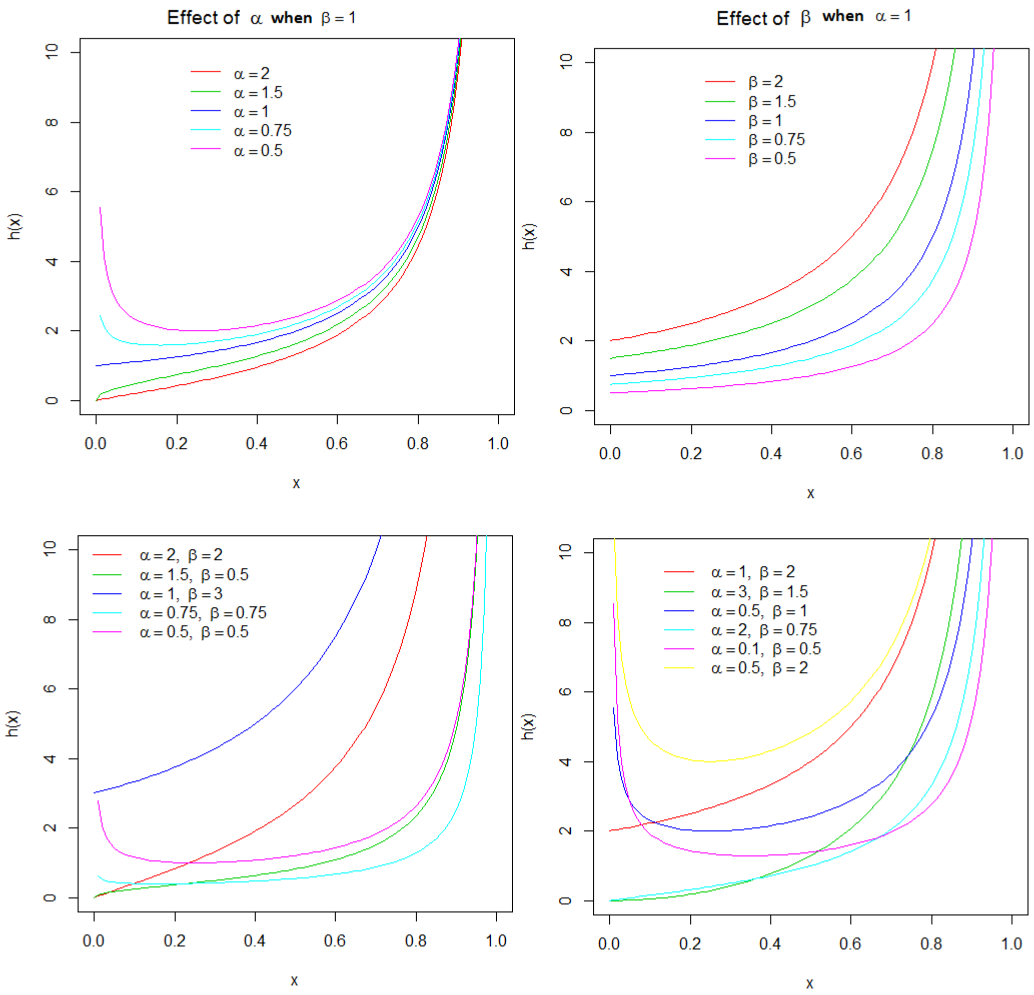
$$h'(x) = \alpha\beta\left[\frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}(1-x^{\alpha}) + \alpha x^{\alpha-1}x^{\alpha-1}}{(1-x^{\alpha})^{2}}\right],$$

$$= \frac{\alpha\beta x^{\alpha-2}(\alpha-1+x^{\alpha})}{(1-x^{\alpha})^{2}},$$

ازآنجاکه به ازای $0 < x < 1$ و $\alpha \geq 1$، $h'(x) > 0$، تابع نرخ خطر صعودی است.
اثبات ب. در این حالت مشتق تابع $h(x)$ محور xها را تنها در یک نقطه مانند x^* قطع می‌کند.

$$x^* = (1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

زمانی که $x < x^*$، $h'(x) < 0$ و تابع نرخ خطر نزولی و به ازای $x > x^*$، $h'(x) > 0$ و این تابع صعودی است. بنابراین به ازای $\alpha < 1$ تابع نرخ خطر توزیع Kum وانی شکل است.
علاوه بر این اگر $x \longrightarrow 0$ آنگاه $h(x) \longrightarrow 0$
اگر $x \longrightarrow 1$ آنگاه $h(x) \longrightarrow +\infty$
نقطه x^* زمانی که $\alpha \longrightarrow 0$، افزایش می‌یابد.
شکل (۱) نمودار تابع نرخ خطر توزیع کاماراسوامی به ازای مقادیر مختلف α و β را نشان می‌دهد که با استفاده از نرم‌افزار R رسم شده است.



شکل ۱: نمودار تابع نرخ خطر توزیع Kum به ازای مقادیر مختلف پارامترها

با توجه به شکل مشخص است که تابع نرخ خطر این توزیع حالت‌های صعودی و وانی شکل را در برمی‌گیرد.

توابع نرخ خطر معکوس، میانگین باقی‌مانده عمر، میانگین گذشته‌ی عمر توزیع Kum برای $۰ < x < ۱$، به ترتیب عبارت‌اند از:

تابع نرخ خطر معکوس:

$$h^*(x) = \frac{\alpha\beta x^{\alpha-۱}(۱-x^\alpha)^{\beta-۱}}{۱-(۱-x^\alpha)^\beta},$$

تابع میانگین باقی‌مانده عمر:

$$m(x) = \frac{\int_x^۱ (۱-u^\alpha)^\beta du}{(۱-x^\alpha)^\beta},$$

تابع میانگین گذشته‌ی عمر:

$$m^*(x) = \frac{\int_۰^x ۱-(۱-u^\alpha)^\beta du}{۱-(۱-x^\alpha)^\beta},$$

تابع میانگین باقی‌مانده عمر و تابع میانگین گذشته‌ی عمر توزیع کاماراسوامی فرم بسته‌ای ندارند. درنتیجه بررسی مستقیم این توابع به‌آسانی امکان‌پذیر نیست. در ادامه با توجه به روابطی که بین توابع نرخ خطر و نرخ خطر معکوس و میانگین باقی‌مانده عمر و میانگین گذشته‌ی عمر وجود دارد رفتار این دو تابع را به‌طور غیرمستقیم بررسی می‌کنیم.

تذکر: تابع چگالی احتمال Kum به ازای $\beta \geq ۱$ و α لگ مقعر است (جونز [۷]).

ما با استفاده از خاصیت لگ مقعر بودن تابع چگالی توزیع کاماراسوامی که توسط جونز [۷] به‌دست‌آمده است و همچنین تعاریف و قضایایی که در ابتدای بخش آن‌ها را معرفی کردیم نتایجی در رابطه با رفتار توابع قابلیت اعتماد به دست می‌آوریم.

نتیجه ۲.۳. متغیر تصادفی کاماراسوامی به ازای $\alpha, \beta \geq ۱$ دارای نرخ خطر صعودی (IFR) و درنتیجه میانگین باقی‌مانده عمر نزولی $(DMRL)$ است.

اثبات.

$$m'(x) = \frac{-(1-x^{\alpha})^{2\beta} - \alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}\int_x^1 (1-u^{\alpha})^{\beta} du}{(1-x^{\alpha})^{2\beta}}, = -1 + \frac{\alpha\beta x^{\alpha-1}\int_x^1 (1-u^{\alpha})^{\beta} du}{(1-x^{\alpha})^{\beta+1}},$$

عبارت پشت علامت جمع یک مقداری بین صفر و یک است که می‌توان نتیجه گرفت که $m'(x) < 0$ است درنتیجه تابع میانگین باقی‌مانده عمر نزولی است. □

نتیجه ۳.۳. فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع Kum باشد. فرض کنید $T_1 = Min(X_i), 1 \leq i \leq n$ و $T_n = Max(X_i), 1 \leq i \leq n$. چون توزیع Kum به ازای $\alpha, \beta \geq 1$ لگ مقعر است، در این حالت توزیع‌های T_1 و T_n نیز به ازای $\alpha, \beta \geq 1$ دارای توزیع لگ مقعر هستند.

نتیجه ۴.۳. فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع Kum باشد. چون توزیع Kum به ازای $\alpha \geq 1$، IFR (یعنی دارای نرخ خطر صعودی) است، آنگاه $T_1 = Min(X_i)$، $1 \leq i \leq n$، نیز IFR است.

نتیجه ۵.۳. فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع Kum به ازای $\alpha, \beta \geq 1$ باشد، آنگاه $T_1 = Min(X_i)$، $1 \leq i \leq n$، دارای نرخ خطر صعودی و $T_n = Max(X_i)$، $1 \leq i \leq n$، دارای نرخ خطر معکوس نزولی است.

نتیجه ۶.۳. متغیر تصادفی کاماراسوامی به ازای $\alpha \geq 1$ دارای نرخ خطر معکوس نزولی و میانگین گذشته‌ی عمر صعودی است. و به ازای $\alpha \leq 1$ دارای نرخ خطر معکوس و میانگین باقی‌مانده عمر وانی شکل وارون و میانگین گذشته‌ی عمر وانی شکل است.

لم ۷.۳. اگر $m(x)$ و $m^*(x)$ به ترتیب توابع میانگین باقی‌مانده عمر و میانگین گذشته‌ی عمر توزیع Kum برای $0 < x < 1$ باشد، آنگاه

الف)

$$m(x) = \frac{\int_x^1 (1-u^{\alpha})^{\beta} du}{(1-x^{\alpha})^{\beta}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\alpha n+1)} \binom{n}{\beta} (1-x^{\alpha n+1})}{(1-x^{\alpha})^{\beta}},$$

ب)

$$m^*(x) = \frac{\int_0^x 1-(1-u^{\alpha})^{\beta} du}{1-(1-x^{\alpha})^{\beta}} = \frac{x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\alpha n+1)} \binom{\beta}{n} x^{\alpha n+1}}{(1-x^{\alpha})^{\beta}},$$

اثبات الف. اگر γ یک عدد حقیقی باشد آنگاه برای $|x| < 1$ خواهیم داشت:

$$(1-x)^{\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\beta}{n} x^n, \qquad (۳)$$

با استفاده از رابطه (۳) و اینکه $0 < u < 1$ است، خواهیم داشت:

$$(1-u^{\alpha})^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\beta}{n} u^{\alpha n},$$

بنابراین داریم:

$$m(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\beta}{n} \int_x^1 u^{\alpha n} du}{(1-x^{\alpha})^{\beta}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\alpha n+1)} \binom{n}{\beta} (1-x^{\alpha n+1})}{(1-x^{\alpha})^{\beta}},$$

اثبات ب. اثبات این قسمت شبیه به اثبات قسمت الف است.

۲.۳ توزیع گامبل-کاماراسوامی

اگر در رابطه (۱) تابع چگالی احتمال و تابع توزیع گامبل-کاماراسوامی که به ترتیب به صورت $g(x) = \sigma^{-1} uexp(-u)$ و $G(x) = exp(-u)$ است را قرار دهیم توزیع گامبل-کاماراسوامی به دست می‌آید. گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع گامبل-کاماراسوامی است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$f(x, \alpha, \beta) = \alpha\beta\sigma^{-1} uexp(-\alpha u)\{1 - exp(-\alpha u)\}^{\beta-1}, \qquad (۴)$$

که در آن $u = exp(\frac{x-\mu}{\sigma})$. تابع توزیع احتمال آن به صورت زیر است:

$$F(x, \alpha, \beta) = 1 - \{1 - exp(-\alpha u)\}^{\beta}.$$

توابع نرخ خطر، نرخ خطر معکوس، میانگین باقی‌مانده عمر و میانگین گذشته‌ی عمر توزیع گامبل-کاماراسوامی به ترتیب به صورت زیر است:

$$h(x) = \frac{\alpha\beta uexp(-\alpha u)}{\sigma\{1 - exp(-\alpha u)\}},$$

$$h^*(x) = \frac{\alpha\beta\sigma^{-1} uexp(-\alpha u)\{1 - exp(-\alpha u)\}^{\beta-1}}{1 - \{1 - exp(-\alpha u)\}^{\beta}},$$

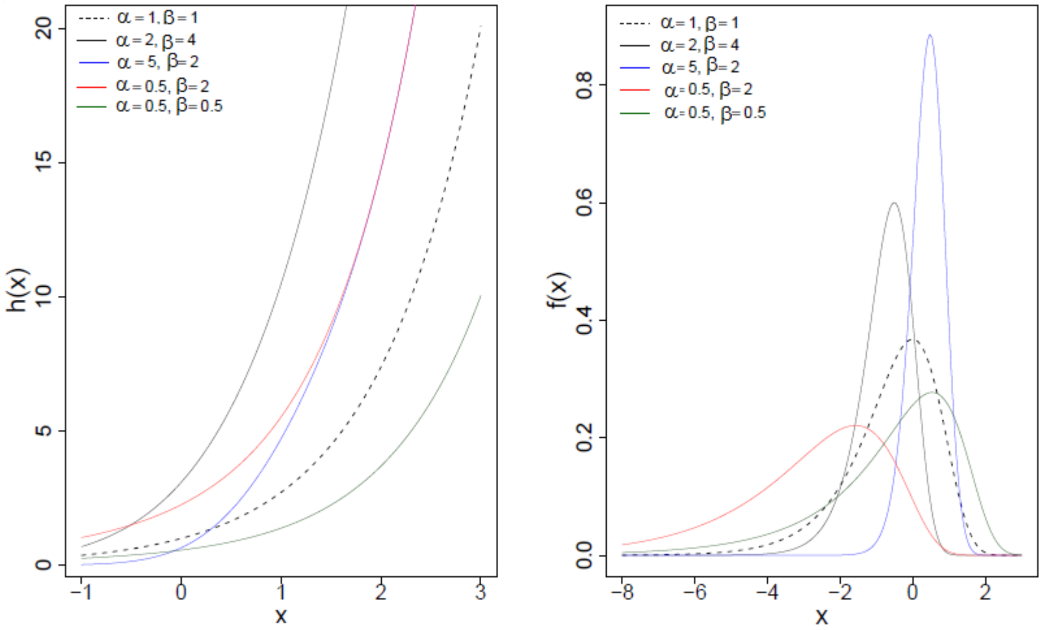
تابع میانگین باقی‌مانده عمر:

$$m(x) = \frac{\int_x^{\infty} (1 - exp(-\alpha(\frac{t-\mu}{\sigma})))dt}{(1 - exp(-\alpha(\frac{x-\mu}{\sigma})))^{\beta}},$$

تابع میانگین گذشته‌ی عمر:

$$m^*(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} (1 - exp(-\alpha(\frac{t-\mu}{\sigma})))dt}{1 - (1 - exp(-\alpha(\frac{x-\mu}{\sigma})))^{\beta}}.$$

شکل (۲) نمودار توابع چگالی احتمال و نرخ خطر توزیع گامبل-کاماراسوامی به ازای مقادیر مختلف α، β، $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ را نشان می‌دهد.



ب الف

شکل ۲: الف) نمودار تابع چگالی احتمال گامبل-کاماراسوامی به ازای بعضی مقادیر از پارامترها، ب) نمودار تابع نرخ خطر گامبل-کاماراسوامی به ازای بعضی مقادیر از پارامترها

لم ۸.۳ تابع چگالی احتمال گامبل-کاماراسوامی به ازای $\alpha > ۰$، $\beta > ۰$، $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$ لگ مقعر($-\frac{\partial^۲ Lnf(x)}{\partial^۲ x} > ۰$) است.

$$\frac{\partial Lnf(x)}{\partial x} = \frac{-u}{\sigma}\left\{\frac{۱}{u} - \alpha + \frac{\alpha(\beta-۱)}{exp(-\alpha u)-۱}\right\},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ Lnf(x)}{\partial^۲ x} &= \frac{-u^۲}{\sigma^۲}\left\{\frac{۱}{u^۲} + \frac{\alpha^۲(\beta-۱)exp(-\alpha u)}{[exp(-\alpha u)-۱]^۲}\right\} \\ &+ \frac{u}{\sigma^۲}\left\{\frac{۱}{u} - \alpha + \frac{\alpha(\beta-۱)}{exp(-\alpha u)-۱}\right\},\end{aligned}$$

از خاصیت لگ مقعر بودن تابع چگالی توزیع گامبل-کاماراسوامی استفاده می‌کنیم و نتایجی در رابطه با رفتار توابع قابلیت اعتماد آن به صورت زیر به دست می‌آوریم.

نتیجه ۹.۳ متغیر تصادفی گامبل-کاماراسوامی به ازای $\alpha > ۰$، $\beta > ۰$، $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$ دارای نرخ خطر صعودی (IFR) و درنتیجه میانگین باقی‌مانده عمر نزولی $(DMRL)$ است.

اثبات.

$$m'(x) = \frac{-(۱-exp(-\alpha(\frac{x-\mu}{\sigma})))}{(۱-exp(-\alpha(\frac{x-\mu}{\sigma})))},$$

که $m'(x) < ۰$ است درنتیجه تابع میانگین باقی‌مانده عمر نزولی است. □

نتیجه ۱۰.۳ فرض کنید $X_۱, X_۲, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع گامبل-کاماراسوامی باشد. فرض کنید $T_۱ = Min(X_i), ۱ \leq i \leq n$ و $T_n = Max(X_i), ۱ \leq i \leq n$. چون توزیع گامبل-کاماراسوامی به ازای $\alpha, \beta > ۰$، $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$ لگ مقعر است، در این حالت توزیع‌های $T_۱$ و T_n نیز به ازای $\alpha, \beta > ۰$ دارای توزیع لگ مقعر هستند.

نتیجه ۱۱.۳ فرض کنید $X_۱, X_۲, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع گامبل-کاماراسوامی باشد. چون توزیع گامبل-کاماراسوامی به ازای $\alpha, \beta > ۰$، $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$، IFR است، آنگاه $T_۱ = Min(X_i), ۱ \leq i \leq n$ نیز IFR است.

نتیجه ۱۲.۳ فرض کنید $X_۱, X_۲, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع گامبل-کاماراسوامی به ازای $\alpha, \beta > ۰$، $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$ باشد، آنگاه $T_۱ = Min(X_i), ۱ \leq i \leq n$ دارای نرخ خطر صعودی و $T_n = Max(X_i), ۱ \leq i \leq n$ دارای نرخ خطر معکوس نزولی است.

نتیجه ۱۳.۳ متغیر تصادفی گامبل کاماراسوامی به ازای $\alpha, \beta > ۰$، $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$ دارای نرخ خطر معکوس نزولی و میانگین گذشته‌ی عمر صعودی است.

۳.۳ توزیع نرمال-کاماراسوامی

اگر در رابطه (۱) تابع چگالی احتمال و تابع توزیع نرمال استاندارد قرار دهیم توزیع نرمال-کاماراسوامی به دست می‌آید. گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال-کاماراسوامی است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

(۵)

$$f(x;\mu,\alpha,\beta,\sigma)=\frac{\alpha\beta}{\sigma}\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})[\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{\alpha-1}[1-\Phi^{\alpha}(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{\beta-1},$$

$x,\mu\in R$، $\alpha,\beta,\sigma>0$ تابع توزیع احتمال آن به صورت زیر است:

$$F(x;\mu,\alpha,\beta,\sigma)=1-[1-\Phi^{\alpha}(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{\beta-1},$$

توابع نرخ خطر، نرخ خطر معکوس، میانگین باقی‌مانده عمر و میانگین گذشته‌ی عمر توزیع نرمال-کاماراسوامی به ترتیب به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\frac{\alpha\beta}{\sigma}\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})[\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{\alpha-1}[1-\Phi^{\alpha}(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{\beta-1}}{[1-\Phi^{\alpha}(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{\beta}} \\ &= \frac{\frac{\alpha\beta}{\sigma}\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})[\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{\alpha-1}}{[1-\Phi^{\alpha}(\frac{x-\mu}{\sigma})]}, \end{aligned}$$

تابع نرخ خطر معکوس:

$$h^{*}(x)=\frac{\frac{\alpha\beta}{\sigma}\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})[\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{\alpha-1}[1-\Phi^{\alpha}(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{\beta-1}}{1-[1-\Phi^{\alpha}(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{\beta}},$$

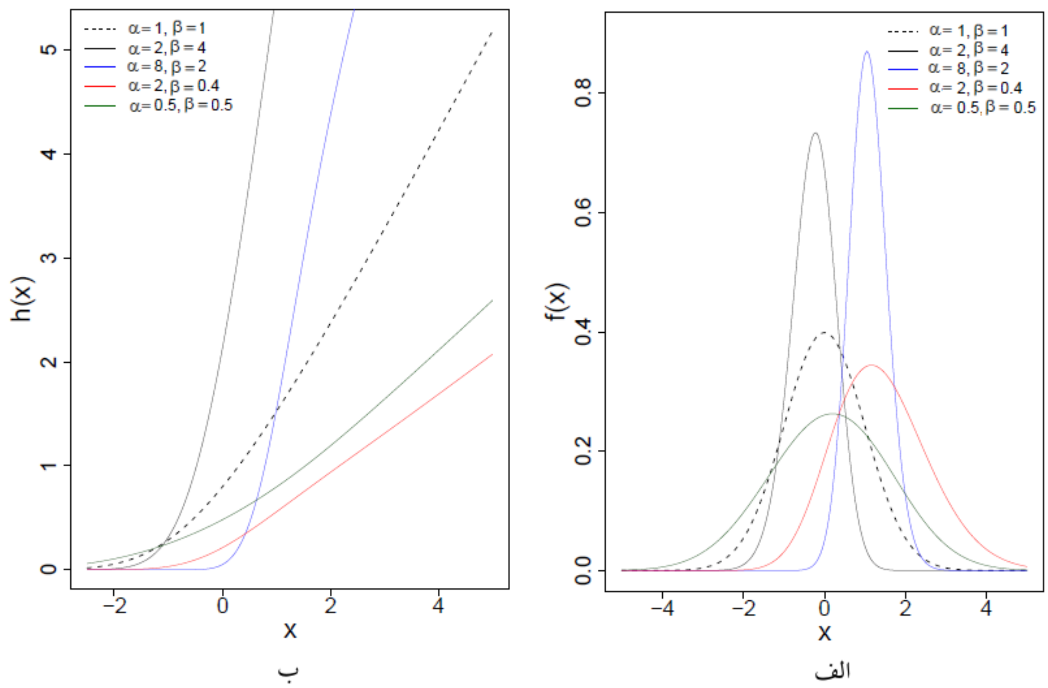
تابع میانگین باقی‌مانده عمر:

$$m(x)=\frac{\int_{x}^{\infty}[1-\Phi^{\alpha}(\frac{u-\mu}{\sigma})]^{\beta}du}{[1-\Phi^{\alpha}(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{\beta}},$$

تابع میانگین گذشته‌ی عمر:

$$m^{*}(x)=\frac{\int_{-\infty}^{x}1-[1-\Phi^{\alpha}(\frac{u-\mu}{\sigma})]^{\beta}du}{1-[1-\Phi^{\alpha}(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{\beta}},$$

شکل (۳) نمودار توابع چگالی احتمال و نرخ خطر توزیع گامبل-کاماراسوامی به ازای مقادیر مختلف α، β، $\mu=0$ و $\sigma=1$ را نشان می‌دهد.



شکل ۳: الف) نمودار تابع چگالی احتمال نرمال-کاماراسوامی به ازای بعضی مقادیر از پارامترها، ب) نمودار تابع نرخ خطر نرمال-کاماراسوامی به ازای بعضی مقادیر از پارامترها

لم ۱۴.۳. تابع چگالی احتمال نرمال-کاماراسوامی به ازای $\alpha,\beta>0$، $\mu=0$ و $\sigma=1$ لگ مقعر ($-\frac{\partial^{2}Lnf(x)}{\partial^{2}x}>0$) است.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Lnf(x)}{\partial^2 x} &= -1+(\alpha-1)\frac{-x\phi(x)\Phi(x)-\phi^2(x)}{\Phi^2(x)}\\ &+ (\beta-1)\frac{-\alpha[(\alpha-1)\Phi^{2\alpha-2}(x)\phi^2(x)-x\phi(x)\Phi^{\alpha-1}(x)](1-\Phi^{\alpha}(x))+\alpha^2\Phi^{2\alpha-2}(x)\phi^2(x)}{(1-\Phi^{\alpha}(x))^2},\end{aligned}$$

از خاصیت لگ مقعر بودن تابع چگالی توزیع نرمال-کاماراسوامی استفاده می‌کنیم و نتایجی در رابطه با رفتار توابع قابلیت اعتماد آن به صورت زیر به دست می‌آوریم.

نتیجه ۱۵.۳. متغیر تصادفی نرمال-کاماراسوامی به ازای $\alpha,\beta>0$، $\mu=0$ و $\sigma=1$ دارای نرخ خطر صعودی (IFR) و درنتیجه میانگین باقی‌مانده عمر نزولی ($DMRL$) است.

اثبات.

$$m'(x)=\frac{-[1-\Phi^{\alpha}(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{\beta}}{[1-\Phi^{\alpha}(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{\beta}},$$

که $m'(x)<0$ است درنتیجه تابع میانگین باقی‌مانده عمر نزولی است. □

نتیجه ۱۶.۳. فرض کنید $X_1,X_2,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع نرمال-کاماراسوامی باشد. فرض کنید $T_1=Min(X_i), 1\leq i\leq n$ و $T_n=Max(X_i), 1\leq i\leq n$. چون توزیع نرمال-کاماراسوامی به ازای $\alpha,\beta>0$، $\mu=0$ و $\sigma=1$ لگ مقعر است، در این حالت توزیع‌های T_1 و T_n نیز به ازای $\alpha,\beta>0$ دارای توزیع لگ مقعر هستند.

نتیجه ۱۷.۳. فرض کنید $X_1,X_2,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع نرمال-کاماراسوامی باشد. چون توزیع نرمال-کاماراسوامی به ازای $\alpha,\beta>0$، $\mu=0$ و $\sigma=1$، IFR (یعنی دارای نرخ خطر صعودی) است، آنگاه $T_1=Min(X_i)$، $1\leq i\leq n$، نیز IFR است.

نتیجه ۱۸.۳. فرض کنید $X_1,X_2,...,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع نرمال-کاماراسوامی به ازای $\alpha,\beta>0$، $\mu=0$ و $\sigma=1$ باشد، آنگاه $T_1=Min(X_i), 1\leq i\leq n$ دارای نرخ خطر صعودی و $T_n=Max(X_i), 1\leq i\leq n$ دارای نرخ خطر معکوس نزولی است.

نتیجه ۱۹.۳. متغیر تصادفی نرمال-کاماراسوامی به ازای $\alpha,\beta>0$ دارای نرخ خطر معکوس نزولی و میانگین گذشته‌ی عمر صعودی است.

۴ ترتیب تصادفی در خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی

۱.۴ ترتیب تصادفی در توزیع Kum

الف) مقایسه متغیرهای تصادفی توزیع Kum با α یکسان و β مختلف

فرض کنید $X_{\alpha,\beta_i}\sim Kum(\alpha,\beta_i), i=1,2$، نسبت چگالی‌های X_{α,β_1} و X_{α,β_2} عبارت است از:

$$\frac{f(x;\beta_2)}{f(x;\beta_1)}=\frac{\alpha\beta_2x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta_2-1}}{\alpha\beta_1x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta_1-1}}=\frac{\beta_2}{\beta_1}(1-x^{\alpha})^{\beta_2-\beta_1},$$

که تابعی صعودی از x است، اگر $\beta_1>\beta_2$. بنابراین برای $\beta_2<\beta_1$، $X_{\alpha,\beta_1}\geq_{LR}X_{\alpha,\beta_2}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta_1}\geq_{HR}X_{\alpha,\beta_2}$، $X_{\alpha,\beta_1}\geq_{ST}X_{\alpha,\beta_2}$ و $X_{\alpha,\beta_1}\geq_{MRL}X_{\alpha,\beta_2}$. که تابعی نزولی از x است، اگر $\beta_2>\beta_1$. بنابراین برای $\beta_2>\beta_1$، $X_{\alpha,\beta_1}\leq_{LR}X_{\alpha,\beta_2}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta_1}\leq_{HR}X_{\alpha,\beta_2}$، $X_{\alpha,\beta_1}\leq_{ST}X_{\alpha,\beta_2}$ و $X_{\alpha,\beta_1}\leq_{MRL}X_{\alpha,\beta_2}$.

ب) مقایسه متغیرهای تصادفی توزیع Kum با β یکسان و α مختلف

فرض کنید $X_{\alpha_i,\beta}\sim Kum(\alpha_i,\beta), i=1,2$، نسبت چگالی‌های $X_{\alpha_1,\beta}$ و $X_{\alpha_2,\beta}$ عبارت است از:

$$\frac{f(x;\alpha_2)}{f(x;\alpha_1)}=\frac{\alpha_2x^{\alpha_2-1}}{\alpha_1x^{\alpha_1-1}},$$

که تابعی صعودی از x است، اگر $\alpha_2>\alpha_1$. بنابراین برای $\alpha_2<\alpha_1$، $X_{\alpha_1,\beta}\geq_{LR}X_{\alpha_2,\beta}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha_1,\beta}\geq_{HR}X_{\alpha_2,\beta}$، $X_{\alpha_1,\beta}\geq_{ST}X_{\alpha_2,\beta}$ و $X_{\alpha_1,\beta}\geq_{MRL}X_{\alpha_2,\beta}$. که تابعی نزولی از x است، اگر $\alpha_1>\alpha_2$. بنابراین برای $\alpha_2<\alpha_1$، $X_{\alpha_1,\beta}\leqslant_{LR}X_{\alpha_2,\beta}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha_1,\beta}\leq_{HR}X_{\alpha_2,\beta}$، $X_{\alpha_1,\beta}\leq_{ST}X_{\alpha_2,\beta}$ و $X_{\alpha_1,\beta}\leq_{MRL}X_{\alpha_2,\beta}$.

ج) مقایسه متغیرهای تصادفی توزیع Kum با توزیع تابع-توانی

می‌خواهیم متغیر تصادفی $X_{\alpha_i,\beta}$ از توزیع Kum را با متغیر تصادفی تابع-توانی X_{α} ($X_{\alpha}\sim Beta(\alpha,1)$)، نسبت به ترتیب‌های تصادفی معین مقایسه کنیم. نسبت چگالی‌های $X_{\alpha_i,\beta}$ و X_{α} عبارت است از:

$$\frac{f(x;\alpha,\beta)}{f(x;\alpha)}=\frac{\alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\beta(1-x^{\alpha})^{\beta-1},$$

که تابعی صعودی از xاست، اگر $۱ > \beta$. بنابراین برای $۱ > \beta$، $X_{\alpha,\beta} \geq_{LR} X_{\alpha}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta} \geq_{HR} X_{\alpha}$ ، $X_{\alpha,\beta} \geq_{ST} X_{\alpha}$ و $X_{\alpha,\beta} \geq_{MRL} X_{\alpha}$ که تابعی نزولی از x است، اگر $۱ < \beta$. بنابراین برای $۱ < \beta$، $X_{\alpha,\beta} \leq_{LR} X_{\alpha}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta} \leq_{HR} X_{\alpha}$ ، $X_{\alpha,\beta} \leq_{ST} X_{\alpha}$ و $X_{\alpha,\beta} \leq_{MRL} X_{\alpha}$.

د) مقایسه متغیرهای تصادفی توزیع Kum با توزیع تابع-توانی

می‌خواهیم متغیر تصادفی $X_{\alpha_i,\beta}$ از توزیع Kum را با متغیر تصادفی تابع-توانی X_{β}
($(X_{\beta} \sim Beta(۱,\beta)$)، نسبت به ترتیب‌های تصادفی معین مقایسه کنیم. نسبت چگالی‌های $X_{\alpha,\beta}$ و X_{β} عبارت است از:

$$\frac{f(x;\alpha,\beta)}{f(x;\beta)} = \frac{\alpha\beta x^{\alpha-۱}(۱-x^{\alpha})^{\beta-۱}}{\beta(۱-x)^{\beta-۱}} = \frac{\alpha x^{\alpha-۱}(۱-x^{\alpha})^{\beta-۱}}{(۱-x)^{\beta-۱}},$$

که تابعی صعودی از x است، اگر $۱ < \beta$ و α . بنابراین برای $۱ < \beta$ و α، $X_{\alpha,\beta} \geq_{LR} X_{\alpha}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta} \geq_{HR} X_{\alpha}$ ، $X_{\alpha,\beta} \geq_{ST} X_{\alpha}$ و $X_{\alpha,\beta} \geq_{MRL} X_{\alpha}$. که تابعی نزولی از xاست، اگر $۱ > \alpha > ۰$ و $۱ > \beta > ۰$، $۱ > \alpha > ۰$ و $۱ > \beta$، $۱ < \alpha$ و $۱ > \beta > ۰$. بنابراین برای $۱ > \alpha > ۰$ و $۱ > \beta > ۰$، $۱ > \alpha > ۰$ و $۱ > \beta$، $۱ < \alpha$ و $۱ > \beta > ۰$، $X_{\alpha,\beta} \leq_{LR} X_{\alpha}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta} \leq_{HR} X_{\alpha}$ ، $X_{\alpha,\beta} \leq_{ST} X_{\alpha}$ و $X_{\alpha,\beta} \leq_{MRL} X_{\alpha}$.

۲.۴ ترتیب تصادفی در توزیع گامبل-کاماراسوامی

الف) مقایسه متغیرهای تصادفی توزیع گامبل-کاماراسوامی با α یکسان و β مختلف

فرض کنید $X_{\alpha,\beta_i} \sim Kum-Gumbel(\alpha,\beta_i), i=۱,۲$، نسبت چگالی‌های $X_{\alpha,\beta_۱}$ و $X_{\alpha,\beta_۲}$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}\frac{f(x;\alpha,\beta_۲)}{f(x;\alpha,\beta_۱)} &= \frac{\alpha\beta_۲ xe^{-\alpha x}(۱-e^{-\alpha x})^{\beta_۲-۱}}{\alpha\beta_۱ xe^{-\alpha x}(۱-e^{-\alpha x})^{\beta_۱-۱}}\\ &= \frac{\beta_۲}{\beta_۱}(۱-e^{-\alpha x})^{\beta_۲-\beta_۱},\end{aligned}$$

که تابعی صعودی از x است، اگر $\beta_۱ < \beta_۲$. بنابراین برای $\beta_۱ < \beta_۲$، $X_{\alpha,\beta_۱} \geq_{LR} X_{\alpha,\beta_۲}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta_۱} \geq_{HR} X_{\alpha,\beta_۲}$ ، $X_{\alpha,\beta_۱} \geq_{ST} X_{\alpha,\beta_۲}$ و $X_{\alpha,\beta_۱} \geq_{MRL} X_{\alpha,\beta_۲}$. که تابعی نزولی از x است، اگر $\beta_۱ > \beta_۲$. بنابراین برای $\beta_۱ > \beta_۲$، $X_{\alpha,\beta_۱} \leq_{LR} X_{\alpha,\beta_۲}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta_۱} \leq_{HR} X_{\alpha,\beta_۲}$ ، $X_{\alpha,\beta_۱} \leq_{ST} X_{\alpha,\beta_۲}$ و $X_{\alpha,\beta_۱} \leq_{MRL} X_{\alpha,\beta_۲}$.

ب) مقایسه متغیرهای تصادفی توزیع گامبل-کاماراسوامی با β یکسان و α مختلف

فرض کنید $X_{\alpha_i,\beta} \sim Kum-Gumbel(\alpha_i,\beta), i=۱,۲$، نسبت چگالی‌های $X_{\alpha_۱,\beta}$ و $X_{\alpha_۲,\beta}$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}\frac{f(x;\alpha,\beta_۲)}{f(x;\alpha,\beta_۱)} &= \frac{\alpha_۲\beta xe^{-\alpha x}(۱-e^{-\alpha_۲ x})^{\beta-۱}}{\alpha_۱ xe^{-\alpha_۱ x}(۱-e^{-\alpha_۱ x})^{\beta-۱}}\\ &= \frac{\alpha_۲}{\alpha_۱}e^{-x(\alpha_۲-\alpha_۱)}\left(\frac{۱-e^{-\alpha_۲ x}}{۱-e^{-\alpha_۱ x}}\right)^{\beta-۱},\end{aligned}$$

که تابعی صعودی از x است، اگر $\alpha_۱ > \alpha_۲$. بنابراین برای $\alpha_۱ > \alpha_۲$، $X_{\alpha_۱,\beta} \geq_{LR} X_{\alpha_۲,\beta}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha_۱,\beta} \geq_{HR} X_{\alpha_۲,\beta}$ ، $X_{\alpha_۱,\beta} \geq_{ST} X_{\alpha_۲,\beta}$ و $X_{\alpha_۱,\beta} \geq_{MRL} X_{\alpha_۲,\beta}$. که تابعی نزولی از x است، اگر $\alpha_۱ < \alpha_۲$. بنابراین برای $\alpha_۱ < \alpha_۲$، $X_{\alpha_۱,\beta} \leqslant_{LR} X_{\alpha_۲,\beta}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha_۱,\beta} \leq_{HR} X_{\alpha_۲,\beta}$ ، $X_{\alpha_۱,\beta} \leq_{ST} X_{\alpha_۲,\beta}$ و $X_{\alpha_۱,\beta} \leq_{MRL} X_{\alpha_۲,\beta}$.

ج) مقایسه متغیرهای تصادفی توزیع گامبل-کاماراسوامی با توزیع گامبل

می‌خواهیم متغیر تصادفی $X_{\alpha,\beta}$ از توزیع گامبل-کاماراسوامی را با متغیر تصادفی گامبل X ، نسبت به ترتیب‌های تصادفی معین مقایسه کنیم. نسبت چگالی‌های $X_{\alpha_i,\beta}$ و X عبارت است از:

$$\begin{aligned}\frac{f(x;\alpha,\beta)}{f(x)} &= \frac{\alpha\beta xe^{-\alpha x}(۱-e^{-\alpha x})^{\beta-۱}}{xe^{-x}}\\ &= \alpha\beta e^{-x(\alpha-۱)}(۱-e^{-\alpha x})^{\beta-۱},\end{aligned}$$

که تابعی صعودی از x است، اگر $\alpha < \beta$ و $۱ < \beta$. بنابراین برای $\alpha < \beta$ و $۱ < \beta$، $X_{\alpha,\beta} \geq_{LR} X$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta} \geq_{HR} X$ ، $X_{\alpha,\beta} \geq_{ST} X$ و $X_{\alpha,\beta} \geq_{MRL} X$. که تابعی نزولی از x است، اگر $\alpha > \beta$ و $۱ > \beta$ ، $\alpha < \beta$ و $۱ > \beta$ ، $\alpha > \beta$ و $۱ < \beta$. بنابراین برای $\alpha > \beta$ و $۱ > \beta$ ، $\alpha < \beta$ و $۱ > \beta$ ، $\alpha > \beta$ و $۱ < \beta$، $X_{\alpha,\beta} \leq_{LR} X$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta} \leq_{HR} X$ ، $X_{\alpha,\beta} \leq_{ST} X$ و $X_{\alpha,\beta} \leq_{MRL} X$.

د) مقایسه متغیرهای تصادفی توزیع گامبل-کاماراسوامی با توزیع نمایی

می‌خواهیم متغیر تصادفی $X_{\alpha,\beta}$ از توزیع گامبل-کاماراسوامی را با متغیر تصادفی نمایی X_{α}، نسبت به ترتیب‌های تصادفی معین مقایسه کنیم. نسبت چگالی‌های $X_{\alpha,\beta}$ و X_{α} عبارت است از:

$$\frac{f(x;\alpha,\beta)}{f(x;\alpha)} = \frac{\alpha\beta xe^{-\alpha x}(۱-e^{-\alpha x})^{\beta-۱}}{\alpha e^{-\alpha x}} = \beta x(۱-e^{-\alpha x})^{\beta-۱},$$

که تابعی صعودی از xاست، اگر $۱ < \beta$. بنابراین برای $۱ < \beta$، $X_{\alpha,\beta} \geq_{LR} X_{\alpha}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta} \geq_{HR} X_{\alpha}$ ، $X_{\alpha,\beta} \geq_{ST} X_{\alpha}$ و $X_{\alpha,\beta} \geq_{MRL} X_{\alpha}$. که تابعی نزولی از x است، اگر $۱ > \beta > ۰$. بنابراین برای $۱ > \beta > ۰$، $X_{\alpha,\beta} \leq_{LR} X_{\alpha}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta} \leq_{HR} X_{\alpha}$ ، $X_{\alpha,\beta} \leq_{ST} X_{\alpha}$ و $X_{\alpha,\beta} \leq_{MRL} X_{\alpha}$.

۳.۴ ترتیب تصادفی در توزیع نرمال-کاماراسوامی

الف) مقایسه متغیرهای تصادفی توزیع نرمال-کاماراسوامی با α یکسان و β مختلف فرض کنید $X_{\alpha,\beta_i} \sim Kum-Normal(\alpha,\beta_i), i=1,2$، نسبت چگالی‌های X_{α,β_1} و X_{α,β_2} عبارت است از:

$$\frac{f(x;\alpha,\beta_2)}{f(x;\alpha,\beta_1)} = \frac{\beta_2(1-\Phi^{\alpha}(x))^{\beta_2-1}}{\beta_1(1-\Phi^{\alpha}(x))^{\beta_1-1}} = \frac{\beta_2}{\beta_1}(1-\Phi^{\alpha}(x))^{\beta_2-\beta_1},$$

که تابعی صعودی از x است، اگر $\beta_2 < \beta_1$. بنابراین برای $\beta_2 < \beta_1$، $X_{\alpha,\beta_1} \geq_{LR} X_{\alpha,\beta_2}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta_1} \geq_{HR} X_{\alpha,\beta_2}$ ، $X_{\alpha,\beta_1} \geq_{ST} X_{\alpha,\beta_2}$ و $X_{\alpha,\beta_1} \geq_{MRL} X_{\alpha,\beta_2}$. که تابعی نزولی از x است، اگر $\beta_1 < \beta_2$. بنابراین برای $\beta_1 < \beta_2$، $X_{\alpha,\beta_1} \leq_{LR} X_{\alpha,\beta_2}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta_1} \leq_{HR} X_{\alpha,\beta_2}$ ، $X_{\alpha,\beta_1} \leq_{ST} X_{\alpha,\beta_2}$ و $X_{\alpha,\beta_1} \leq_{MRL} X_{\alpha,\beta_2}$.

ب) مقایسه متغیرهای تصادفی توزیع نرمال-کاماراسوامی با β یکسان و α مختلف

فرض کنید $X_{\alpha_i,\beta} \sim Kum-Normal(\alpha_i,\beta), i=1,2$، نسبت چگالی‌های $X_{\alpha_1,\beta}$ و $X_{\alpha_2,\beta}$ عبارت است از:

$$\frac{f(x;\alpha_1,\beta)}{f(x;\alpha_2,\beta)} = \frac{\alpha_1\Phi^{\alpha_1-1}(x)(1-\Phi^{\alpha_1}(x))^{\beta-1}}{\alpha_2\Phi^{\alpha_2-1}(x)(1-\Phi^{\alpha_2}(x))^{\beta-1}},$$

که تابعی صعودی از x است، اگر $\alpha_1 < \alpha_2$. بنابراین برای $\alpha_1 < \alpha_2$، $X_{\alpha_1,\beta} \geq_{LR} X_{\alpha_2,\beta}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha_1,\beta} \geq_{HR} X_{\alpha_2,\beta}$ ، $X_{\alpha_1,\beta} \geq_{ST} X_{\alpha_2,\beta}$ و $X_{\alpha_1,\beta} \geq_{MRL} X_{\alpha_2,\beta}$. که تابعی نزولی از x است، اگر $\alpha_2 < \alpha_1$. بنابراین برای $\alpha_2 < \alpha_1$، $X_{\alpha_1,\beta} \leqslant_{LR} X_{\alpha_2,\beta}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha_1,\beta} \leq_{HR} X_{\alpha_2,\beta}$ ، $X_{\alpha_1,\beta} \leq_{ST} X_{\alpha_2,\beta}$ و $X_{\alpha_1,\beta} \leq_{MRL} X_{\alpha_2,\beta}$.

ج) مقایسه متغیرهای تصادفی توزیع نرمال-کاماراسوامی با توزیع نرمال استاندارد

می‌خواهیم متغیر تصادفی $X_{\alpha,\beta}$ از توزیع نرمال-کاماراسوامی را با متغیر تصادفی نرمال استاندارد X، نسبت به ترتیب‌های تصادفی معین مقایسه کنیم. نسبت چگالی‌های $X_{\alpha,\beta}$ و X عبارت است از:

$$\frac{f(x;\alpha,\beta)}{\phi(x)} = \frac{\alpha\beta\phi(x)[\Phi(x]^{\alpha-1}[1-\Phi^{\alpha}(x)]^{\beta-1}}{\phi(x)},$$

که تابعی صعودی از xاست، اگر $\beta < 1$. بنابراین برای $\beta < 1$، $X_{\alpha,\beta} \geq_{LR} X$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta} \geq_{HR} X$ ، $X_{\alpha,\beta} \geq_{ST} X$ و $X_{\alpha,\beta} \geq_{MRL} X$. که تابعی نزولی از xاست، اگر $1 < \beta$. بنابراین برای $1 < \beta$، $X_{\alpha,\beta} \leq_{LR} X$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta} \leq_{HR} X$ ، $X_{\alpha,\beta} \leq_{ST} X$ و $X_{\alpha,\beta} \leq_{MRL} X$.

د) مقایسه متغیرهای تصادفی توزیع نرمال-کاماراسوامی با توزیع Kum

می‌خواهیم متغیر تصادفی $X_{\alpha,\beta}$ از توزیع نرمال-کاماراسوامی را با متغیر تصادفی Kum ($X'_{\alpha,\beta} \sim kum(\alpha,\beta)$) ، نسبت به ترتیب‌های تصادفی معین مقایسه کنیم. نسبت چگالی‌های $X_{\alpha,\beta}$ و $X'_{\alpha,\beta}$ عبارت است از:

$$\frac{f(x;\alpha,\beta)}{f(x;\alpha,\beta)} = \frac{\alpha\beta\Phi^{\alpha-1}(x)(1-\Phi^{\alpha}(x))^{\beta}\phi(x)}{\alpha\beta x^{\alpha-1}(1-x^{\alpha})^{\beta-1}},$$

که تابعی صعودی از x است، اگر $\alpha,\beta > 1$. بنابراین برای $\alpha,\beta > 1$، $X_{\alpha,\beta} \geq_{LR} X'_{\alpha,\beta}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta} \geq_{HR} X'_{\alpha,\beta}$ ، $X_{\alpha,\beta} \geq_{ST} X'_{\alpha,\beta}$ و $X_{\alpha,\beta} \geq_{MRL} X'_{\alpha,\beta}$. که تابعی نزولی از x است، اگر $0 < \alpha < 1$ و $0 < \beta < 1$، $0 < \alpha < 1$ و $\beta > 1$، $\alpha > 1$ و $0 < \beta < 1$. بنابراین برای $0 < \alpha < 1$ و $0 < \beta < 1$، $0 < \alpha < 1$ و $\beta > 1$، $\alpha > 1$ و $0 < \beta < 1$، $X_{\alpha,\beta} \leq_{LR} X'_{\alpha,\beta}$ که نتیجه می‌دهد $X_{\alpha,\beta} \leq_{HR} X'_{\alpha,\beta}$ ، $X_{\alpha,\beta} \leq_{ST} X'_{\alpha,\beta}$ و $X_{\alpha,\beta} \leq_{MRL} X'_{\alpha,\beta}$.

۵ مثال کاربردی:داده‌های مربوط به اطلاعات عملکرد بنزین

در این بخش قابلیت برازش مدل کاماراسوامی را با مدل بتا بر داده‌های واقعی مقایسه می‌کنیم. برای این منظور از مجموعه داده‌هایی که توسط پراتر [۱۵] جمع‌آوری‌شده است، استفاده می‌کنیم. داده‌ها مربوط به اطلاعات عملکرد بنزین شامل ۳۲ مشاهده و شش متغیر است، متغیرهای عملکرد که نسبت نفت خام تبدیل‌شده به بنزین پس از تقطیر جزء به جزء است، دما، درجه حرارت (بر حسب فارنهایت)، فشار، جاذبه زمین، دسته که در جدول (۱) ارائه‌شده‌اند. که در این مقاله متغیر عملکرد را موردبررسی قرار می‌دهیم.

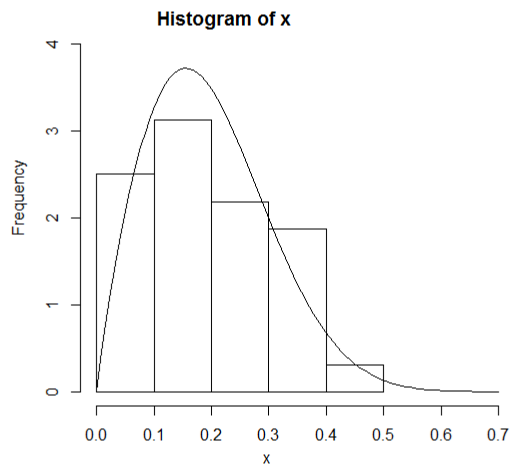
جدول (۲) خلاصه‌ای از آماره‌های محاسبه‌شده برای داده‌ها ، کل□ (۴) نمودار بافت‌نگار داده‌های مربوط به اطلاعات عملکرد بنزین را نشان می‌دهد. برای مقایسه مدل‌ها از معیار اطلاع آکائیکه (AIC) و آماره کلموگروف-اسمیرنوف $(K-S)$ و P-مقدار نظیر آن‌ها استفاده‌شده است. مقادیر کوچک آماره $(K-S)$ و بزرگ P-مقدار دلالت بر پذیرفته شدن فرض مناسب بودن مدل دارد. محاسبات مربوط به برازش این مدل‌ها در جدول (۳) ارائه گردیده است. این جدول شامل برآورد حداکثر درستنمایی پارامترهای مدل‌های مطرح‌شده، معیار اطلاع آکائیکه (AIC) آن‌ها و همچنین مقدار آماره آزمون کلموگروف-اسمیرنوف $(K-S)$ به همراه P-مقدار این آزمون می‌باشد. با توجه به مقادیر ارائه‌شده در این جدول و با مقایسه معیارهای مختلف به نظر می‌رسد توزیع کاماراسوامی برازش بهتری به داده‌ها ارائه کرده است. همچنین شکل (۵) نیز به تأیید این موضوع کمک می‌کند.

جدول ۱: داده‌های مربوط به اطلاعات عملکرد بنزین

۰/۱۲۲	۰/۲۲۳	۰/۳۴۷	۰/۴۵۷	۰/۰۸۰	۰/۱۳۱	۰/۲۶۶	۰/۰۷۴
۰/۱۸۲	۰/۳۰۴	۰/۰۶۹	۰/۱۵۲	۰/۲۶۰	۰/۳۳۶	۰/۱۴۴	۰/۲۶۸
۰/۳۴۹	۰/۱۰۰	۰/۲۴۸	۰/۳۱۷	۰/۲۸۰	۰/۰۶۴	۰/۶۱۰	۰/۲۷۸
۰/۰۵۰	۰/۱۷۶	۰/۳۲۱	۰/۱۴۰	۰/۲۳۲	۰/۰۸۵	۰/۴۷۰	۰/۱۸۰

جدول ۲: شاخص‌های آماری مجموعه داده‌های مربوط به اطلاعات عملکرد بنزین

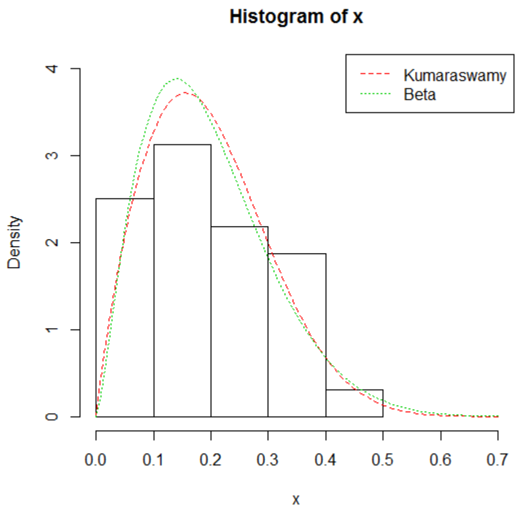
تعداد (n)	چارک اول	چارک سوم	دامنه	ضریب تغییرات	انحراف معیار	میانه	میانگین
۳۲	۰/۱۱۶	۰/۲۷۰	۰/۴۲۹	۰/۵۴۵	۰/۱۰۷	۰/۰۸۹	۰/۱۹۶



شکل ۴: نمودار بافت‌نگار داده‌های مربوط به اطلاعات عملکرد بنزین

جدول ۳: مقادیر MLE و AIC و BIC و $K-S$ و $P-value$ برای دو مدل Kum، B. (عبارت داخل پرانتز انحراف استاندارد پارامترهاست.)

توزیع	α	β	AIC	BIC	$K-S$	$P-value$	$loglike$
کاماراسوامی	۱٫۸۸۵ (۰٫۲۹۰)	۱۶٫۳۶۴ (۷٫۰۷۲)	−۵۳٫۰۲۲	−۵۰٫۰۹۱	۰٫۰۸۳۱	۰٫۹۸۰	۲۸٫۵۱۰
بتا	۲٫۴۶۴ (۰٫۵۸۰)	۱۰٫۱۱۳ (۲٫۵۷۳)	−۵۲٫۷۷۰	−۴۹٫۸۳۹	۰٫۰۹۲۱	۰٫۹۴۹	۲۸٫۳۷۰



شکل ۵: بافت‌نگار مجموعه داده‌های مربوط به اطلاعات عملکرد بنزین و برازش آن‌ها با توزیع‌های Kum و B

نمودار (۵) بافت‌نگار داده‌ها به همراه چگالی‌های برازش داده‌شده به آن‌ها را نشان می‌دهد. این شکل به‌نوعی نتیجه به‌دست‌آمده توسط جدول (۳) را تأیید می‌کند و نشان می‌دهد که مدل کاماراسوامی بهترین برازش را دارد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به معرفی خانواده توزیع‌های G-کاماراسوامی پرداختیم و رفتار توابع قابلیت اعتماد نظیر توابع نرخ خطر، نرخ خطر معکوس، میانگین باقی‌مانده عمر، میانگین گذشته‌ی عمر برای زیر رده‌ای از این خانواده نظیر توزیع‌های کاماراسوامی،گامبل-کاماراسوامی، نرمال-کاماراسوامی بررسی کردیم. توانایی توزیع کاماراسوامی با توزیع بتا در تحلیل داده‌های واقعی مورد مقایسه قرار دادیم و مشاهده کردیم که توزیع کاماراسوامی برازش بهتری نسبت به توزیع بتا برای این مجموعه داده‌ها دارد.

مراجع

[1] AL-Fattah, A. M., El-Helbawy, A. A., and Al-Dayian, G. R. (2017). Inverted kumaraswamy distribution. *Pakistan Journal of Statistics*, **33**(1), 37–61.

[2] Arnold, B.C., Balakrishnan, N., and Nadaraja, H.N. (1992). *A first course in order statistics*,Wiley, New York.

[3] Cordeiro G. M. and Castro, M. (2011). A new family of generalized distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 883–898.

[4] Cordeiro, G. M., Nadarajah, S., and Ortega, E. M. M. (2012). The Kumaraswamy Gumbel distribution, *Statistical Methods and Applications*, **21**, 139–168.

[5] Cordeiro, G. M., Ortega, E.M.M., and Nadarajah, S. (2010). The Kumaraswamy Weibull distribution with application to failure data. *Journal of the Franklin Institute*, **347**, 1399–1429.

[6] Hu, T. and li, Y. (2007). Increasing failure rate and decreasing reversed hazard rate properties of the minimum and maximum of multivariate distributions with log-concave densities.*Metrika*, **65** (3), 325–330.

[7] Jones, M.C. (2009). Kumaraswamy's distributions: A beta-type distribution with some tractability advantages. *Statistical Methodology*, **6**, 70–81.

[8] Kayal, S., (2019). Stochastic comparisons of series and parallel systems with Kumaraswamy-G distributed components. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **38**(1), 1–22.

[9] Kumaraswamy, P. (1980). A generalized probability density function for doublebounded random-processes. *Journal of Hydrology*, **46**, 79–88.

[10] Lehmann, E. L. (1955). Ordered families of distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, **26**, 399–419.

[11] Mi, J. (1995). Bathtub failure rate and upside-down bathtub mean residual life. *IEEE Transactions on Reliaility*, **44**(3), 388–391.

[12] Muller, A. and Stoyan, D. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley and Sons Ltd., Chichester.

[13] Nadar, M., Papadopoulos, A., and Kızılaslan, F. (2012). Statistical analysis for Kumaraswamy's distribution based on record data. *Statistical Papers*, **54**(2), 355–369.

[14] Pascoa, M.A.R., Ortega, E.M.M., and Cordeiro, G.M.(2010). The Kumaraswamy generalized gamma distribution with application in survival analysis. *Statistical Methodology*, **8** (5), 411–433.

[15] Prater, N.H. (1956). Estimate Gasoline Yields from Crudes. *Petroleum Refiner*, **35**(5), 236–238.

[16] Ponnambalam, K., Seifi, A., and Vlach, J. (2001). Probabilistic design of systems with general distributions of parameters.*Int J Circuit Theory Appl*, **29**, 527–536.

[17] Royden, H.L. (1968). *Real analysis*. Prentice Hall of India,New Delhi.

[18] Shaked, M. and shantikumar, J.G. (2007). *Stochastic orders*. New York:Springer.

[19] Wang, B. X., Wang, X. K., and Yu, K. (2017). Inference on the Kumaraswamy distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods,* **46**(5), 2079–2090.