# تحلیل تورم بلندمدت با استفاده از مدل با ضرایب متغیر

رضا چراغی[۱]، سید رضا هاشمی[۲]

تاریخ دریافت: ۹۷/۱۲/۲۶
تاریخ پذیرش: ۹۹/۱۱/۱

چکیده:

هنگامی‌که داده‌ها از یک الگوی خطی ثابت تبعیت نکنند و به شکل پویایی برحسب زمان یا مکان الگوهای متنوعی داشته باشند، مدل‌های با ضرایب متغیر به‌عنوان مهم‌ترین ابزار برای کشف الگوهای پویا در آن‌ها مطرح می‌شوند. این مدل‌ها تعمیم طبیعی مدل‌های کلاسیک پارامتری هستند که با تفسیرپذیری خوب، محبوبیت زیادی در تحلیل داده‌ها به دست آورده‌اند. انعطاف‌پذیری و تفسیرپذیری بالای این مدل‌ها سبب کاربرد زیاد آن‌ها در داده‌های واقعی شده است. در این مقاله ضمن مرور مختصری بر مدل‌های با ضرایب متغیر به روش برآورد پارامتر با استفاده از تابع هسته و اسپلاین مکعبی پرداخته و بازه اطمینان و آزمون فرض برای توابع پارامترها به دست می‌آوریم. درنهایت با استفاده از داده‌های واقعی نرخ تورم ایران در سال‌های ۱۳۶۸ تا ۱۳۹۶، کاربرد و قابلیت‌های مدل با ضرایب متغیر را در تفسیر نتایج نشان می‌دهیم چالش اصلی عدم برازش مناسب مدل داده‌های پانلی و نیز مدل‌های با واریانس غیرثابت سری‌های زمانی مثل مدل‌های آرچ و گارچ و مشتقات آن‌ها به این داده‌هاست که استفاده از مدل‌های با ضرایب متغیر را توجیه می‌نماید.

**واژه‌های کلیدی:** مدل با ضرایب متغیر، تابع هسته، اسپلاین مکعبی، نرخ تورم ایران.

## ۱ مقدمه

استنباط آماری پارامتری معمولاً نیاز به برقراری برخی پیش‌فرض‌ها، ازجمله خطی بودن یا ثابت بودن واریانس جمله خطا دارد، اگرچه خواص این مدل‌ها به‌خوبی بیان‌شده است اما عدم برقراری پیش‌فرض‌ها در کاربردهای واقعی محدودیت‌های زیادی را به بار می‌آورند. مدل‌های با ضرایب متغیر نخستین بار توسط کلولند و گروس (۱۹۹۱)[۵] برای بسط برنامه‌های کاربردی تکنیک‌های رگرسیون‌های محلی در حالت ساده و چندگانه مطرح شد. در رگرسیون خطی برآورد پارامترهای مجهول با استفاده از روش کمترین مربعات به دست می‌آیند اما در مدل‌های با ضریب متغیر به این دلیل که هرکدام از پارامترها تابعی مجهول از متغیرهای کمکی هستند، برآورد پارامترها به‌راحتی انجام نمی‌شود. مدل‌های با ضریب متغیر ناپارامتری نخستین بار توسط هستی و تیبشیرانی (۱۹۹۳)[۱۰]، ارائه شد. این مدل‌ها یک کلاس از مدل‌های رگرسیون تعمیم‌یافته هستند که در آن ضرایب، مجاز به تغییر به‌عنوان توابع هموار از متغیرهای دیگر هستند. به‌این‌ترتیب اریبی مدل‌سازی به‌طور قابل‌توجهی می‌تواند کاهش یابد و مدل‌ها جذاب‌تر و تفسیرپذیر تر شوند. چنین مدل‌هایی به‌طور ویژه‌ای در مطالعات طولی مورداستفاده قرار می‌گیرند که در آن‌ها هدف تعیین متغیرهای کمکی است که در طول زمان تغییرات پاسخ را تحت تأثیر قرار می‌دهند. هوور و همکاران[۱۱]، برامبک و رایس (۱۹۸۸)[۲] و فان و ژانگ (۱۹۹۹)[۹] در مورد کاربردهای مدل‌های با ضریب متغیر در داده‌های طولی پژوهش نمودند. روش‌هایی که برای برآورد پارامترها در این حالت بیان‌شده است عبارت‌اند از: روش هسته □ چندجمله‌ای هموارسازی محلی، روش چندجمله‌ای اسپلاین و روش هموارسازی اسپلاین. وو و همکاران[۱۵]، هوور و همکاران (۱۹۹۸)[۱۱]،و فان و ژانگ (۱۹۹۹)[۹] روی برآورد پارامتر با روش هسته □ چندجمله‌ای هموارسازی محلی تحقیق کردند. در زمینه اسپلاین چندجمله‌ای هانگ و همکاران (۲۰۰۲)[۱۲] و هانگ و شن [۱۲] و در زمینه هموارسازی اسپلاین نیز هستی و تیبشیرانی(۱۹۹۳)[۱۰]، هوور و همکاران [۱۱]،و چیانگ و همکاران[۴]، کار کردند. در این مقاله در بخش ۲ مدل‌های با ضرایب متغیر معرفی خواهند شد، در بخش ۳ به روش برآورد پارامتر و ساختن بازه اطمینان و آزمون فرض به کمک تابع هسته پرداخته خواهد شد. در بخش ۴ نتایج عددی این مدل‌ها با استفاده از نرم‌افزار $R$ ارائه و از هموارساز اسپلاین مکعبی با درجه آزادی بالا به‌عنوان نوآوری در بحث استفاده کردیم.

[۱] گروه آمار، دانشگاه رازی، کرمانشاه
[۲] گروه آمار، دانشگاه رازی، کرمانشاه r.hashemi@razi.ac.ir

# ۲ معرفی مدل

در رگرسیون معمولی هدف برآورد ضرایب رگرسیونی است که ضرایب ثابتی هستند که با استفاده از روش‌هایی مانند کمترین مربعات معمولی می‌توان این ضرایب را برآورد کرد و تأثیر هر متغیر مستقل را بر متغیر وابسته نشان دهد. این در حالی است که در سال‌های اخیر و با پیشرفت‌هایی که در زمینه مسائل آماری رخ داد به این نتیجه رسیدند که در بسیاری از مدل‌ها به دلیل داشتن انعطاف‌پذیری بالا نمی‌توان روش‌های رگرسیون معمولی را استفاده کرد زیرا استفاده از این روش‌ها سبب کاهش انعطاف‌پذیری و همچنین کاهش تفسیرپذیری مدل می‌شد. به خاطر همین مسئله مدل‌هایی تحت عنوان مدل‌های با ضرایب متغیر مطرح شدند که در آن‌ها مقادیر ضرایب مدل‌ها ثابت نبودند و قادر به تغییر و انعطاف‌پذیری مدل بودند. حالت‌های مختلفی برای مدل‌های با ضرایب متغیر مطرح شد که به شکل زیر می‌توان آن‌ها را مرور نمود:

فان و ژانگ (۱۹۹۹)[۹] مدل‌های با ضرایب متغیر چند متغیره را به‌صورت زیر نمایش داده‌اند:

$$m(U,X) = X^T(U) \qquad (۱)$$

که در آن متغیرهای پیشگو، چند متغیره و شامل یک اسکالر $U$ و یک بردار $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)^T$ است. هستی و تیبشیرانی (۱۹۹۳)[۱۰] این مدل‌ها را به‌صورت زیر معرفی کردند:

$$Y = X_1\beta_1(u_1) + X_2\beta_2(u_2) + \ldots + X_p\beta_p(u_p) + \varepsilon \qquad (۲)$$

مدل فوق نشان می‌دهد که علاوه بر این‌که $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ هرکدام توابع نامعینی از متغیرهای کمکی $u_1, u_2, \ldots, u_p$ هستند، برای متغیرهای کمکی در مدل (۲.۱) نیز متغیر وابسته محسوب می‌شوند. تعمیم چند متغیره این مدل‌ها در حالت کلی به شکل زیر است:

$$Y = \beta_1(u_1)X_1 + \beta_2(u_2)X_2 + \ldots + \beta_p(u_p)X_p \qquad (۳)$$

که در آن $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ توابعی نامعین از متغیرهای برداری $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{ip})$ هستند. در همه مدل‌های با ضرایب متغیر فوق، اثر متقابل بین متغیرهای کمکی $u_1, u_2, \ldots, u_p$ و متغیرهای مستقل $X_1, X_2, \ldots, X_p$ به‌طور ضمنی وجود دارد. در عمل مدل (۱) بیشتر مورداستفاده قرار می‌گیرد و در بین سایر حالت‌ها محبوبیت بیشتری دارد. در مدل‌های با ضرایب متغیر $u_i$ متغیر شاخص نام دارد که سبب می‌شود ضرایب تابعی از آن‌ها باشد. متغیرهای شاخص می‌توانند در مواردی با استفاده از $X_i$ قابل‌تشخیص و در موارد دیگر قابل‌تشخیص نباشد.

# ۳ خواص مدل‌های با ضرایب متغیر

## ۱.۳ برآورد پارامتر

در برآورد پارامترهای مدل، زمانی که ضرایب متغیر هستند نیز مشابه مدل‌های خطی، از روش کمترین مربعات استفاده می‌شود، به‌جز اینکه در این روش تابع کمترین مربعات همراه با یک تابع هسته برای برآورد پارامترها مورداستفاده قرار می‌گیرد. هدف برآورد پارامترهای $\hat{\beta}_i(u)$ از $\beta_i(u)$ با مینیمم کردن تابع زیر می‌باشد:

$$L(\beta, b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - X^T\beta + \mathbf{b}(U_i - u_0)]^2 K_h(U_i - u_0) \qquad (۴)$$

که در آن $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)^T$ و $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_p)^T$ است. تابع $K(t) = \frac{K(\frac{t}{h})}{h}$ تابع هسته است. رویکرد برآورد پارامتر در اینجا ناپارامتری است، فان و ژانگ (۱۹۹۹)[۹] از هسته اپانیچنیکوف و وانگ [۱۴] از هسته گاوس برای مینیمم کردن رابطه (۴) استفاده کردند. در این نوشتار نیز به دلیل محبوبیت هسته اپانیچنیکوف از آن در برآورد ضرایب استفاده می‌شود. مدل با ضرایب متغیر زیر را در نظر بگیرید:

$$y = X^T\beta(U) + \varepsilon \qquad (۵)$$

فرض کنید $(U_i, X_i^T, y_i)$ و $i = 1, 2, \ldots, n$ نمونه‌ای از $(U, X^T, y)$ باشد و $E[\varepsilon] = 0$ و $var(\varepsilon) = \sigma^2(U) \quad \forall u$ برآورد خطی محلی $\hat{\beta}_i(u)$ از $\beta_i(u)$ با مینیمم کردن رابطه زیر به دست می‌آید:

$$L(\beta, b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - X^T\beta + \mathbf{b}(U_i - u_0)]^2 K_h(u)$$

در رابطه فوق از هسته اپانیچنیکوف استفاده‌شده که تابع هسته آن به شکل زیر است:

$$K(u) = \frac{3}{4}(1 - u^2)$$

فرض کنید که $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^T$ و $\mathbf{U}_n = diag(U_1 - u, \ldots, U_n - u)$ و $\Gamma_n = (X, U_nX)$ و $W_u = diag(K_h(U_1 - u), \ldots, K_h(U_n - u))$.

بنابراین برآورد $\hat{\beta}(u)$ برابر است با:

$$\hat{\beta}(u) = (I_p, 0_p)(\Gamma_u^T W_u \Gamma_u)\Gamma_u^T W_u Y \qquad (۶)$$

که $I_p$ ماتریس همانی با اندازه $p$ و $0_p$ یک ماتریس صفر با اندازه $p$ است.

## ۲.۳ بازه اطمینان

روش‌های مختلفی برای ساخت بازه اطمینان[3] در این زمینه وجود دارد، وو و همکاران (۱۹۹۸)[۱۵]و چیانگ و همکاران (۲۰۰۱)[۴] روی بازه اطمینان نقطه‌ای برای توابع ضرایب در مدل‌های با ضرایب متغیر مطالعه انجام دادند. در واقع وو و همکاران (۱۹۹۸) با استفاده از تقریب بنفرونی بازه اطمینان تقریبی را به دست آوردند. در استنباط‌های ناپارامتری بازه اطمینان نقطه‌ای چندان معنی ندارد چون برای یک تابع نامعلوم $g(.)$ بازه اطمینان $1-\alpha$ نقطه‌ای $(g_1(.), g_2(.))$ است و فقط تضمین می‌کند که

$$P(\hat{g}_1(u) \leq g(u) \leq \hat{g}_2(u)) = 1-\alpha \ ;$$

برای هر $u$ داده‌شده، اما ایجاب نمی‌کند که:

$$P(\tilde{g}_1(u) \leq g(u) \leq \tilde{g}_2(u) : \forall u \in D) = 1-\alpha$$

که در آن $D$ یک مجموعه فشرده دلخواه است. در استنباط ناپارامتری کران‌های اطمینان مناسب هستند، در ساختن کران‌های اطمینان برای ضرایب تابعی در مدل‌های با ضریب متغیر، بیشترین چالش و مهم‌ترین کار، به دست آوردن توزیع حداکثر اختلاف بین تابع ضرایب برآورد شده و تابع ضرایب واقعی است. فان و ژانگ [۹] برای ساختن یک کران اطمینان برای ضرایب تابعی برای مدل‌های با ضریب متغیر قضیه زیر را ارائه کردند:

**قضیهٔ ۱.۳.** تحت شرایط نظم در فان و ژانگ(۲۰۰۰)[۹] داریم:

$$P((-2logh)^{\frac{1}{2}}(\sup_{u\in[0,1]} \frac{|\hat{\beta}_j(u)-\beta_j(u)-(\widehat{bias}\hat{\beta}_j(u)|D)|}{[v\hat{a}r(\hat{\beta}_j(u)\mid D)]^{\frac{1}{2}}} -d_{v,n}) < x) \to exp[-2exp(-x)] \qquad (7)$$

برای هر $j$ داده‌شده و $j=1,2,...,p$ که در آن:

$$d_{v,n} = (-2logh)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{(-2logh)^{-\frac{1}{2}}} log[\frac{1}{4v_0\pi}\int (k^{'}(t))^2 dt]$$

و

$$v_0 = \int k^2(t)dt$$

در نتیجه با استفاده از قضیه فوق یک پهنای باند $1-\alpha$ از $\hat{\beta}_j(u)$ به‌راحتی می‌تواند به‌صورت زیر به دست آید:

$$\hat{\beta}_j(u) - \widehat{bias}(\hat{\beta}_j(u)\mid D) \pm \Delta_{j,\alpha}(u)$$

که در آن:

$$\Delta_{j,\alpha}(u) = (d_{v,n} + [log2 - log\{log(1-\alpha)\}] (-2logh)^{\frac{1}{2}})[\widehat{var}(\hat{\beta}_j(u)\mid D)]^{\frac{1}{2}} \qquad (8)$$

برآوردگر $\widehat{(bias)}(\hat{\beta}_j(u)\mid D)$ از اریبی شرطی $\hat{\beta}_j(u)$ و برآوردگر $\widehat{var}(\hat{\beta}_j(u)\mid D)$ از واریانس شرطی $\hat{\beta}_j(u)$ می‌تواند از طریق برآورد معرفی‌شده در بخش قبل نوشته شود. فان و ژانگ (۲۰۰۰) [۹] نشان داده‌اند که این فواصل اطمینان کاملاً خوب کار می‌کنند.

هانگ و همکاران (۲۰۰۲و۲۰۰۴) [۱۳] فواصل اطمینان نقطه‌ای را بر اساس رویکرد چندجمله‌ای اسپلاین و بنفرونی[4] موردبررسی قراردادند.

## ۳.۳ آزمون فرض

فرض مهمی که در آزمون فرض[5] مدل‌های با ضرایب متغیر مطرح می‌شود، این است که آیا ضرایب متغیر هستند یا مقدار ثابتی دارند؟ و اینکه آیا توابعی از متغیرهای کمکی $X$ هستند که از لحاظ آماری معنی‌دار می‌باشند؟برای پاسخ به این سؤال آزمونی به‌صورت زیر طرح می‌کنیم:

$$\begin{cases} H_0: & \beta_j(u) = c_j \\ H_1: & \beta_j(u) \neq c_j \end{cases} \qquad (9)$$

که $c_j$ یک مقدار ثابت و نامعلوم است. اگر فرض صفر پذیرفته شود، مدل ما ضریب متغیری ندارد و ضریب موردنظر ثابت است ولی اگر فرض صفر رد شود نتیجه می‌گیریم که ضرایب به‌صورت تابعی از ضرایب کمکی و نامعلوم $u_i$ هستند. پس باید به دنبال ناحیه بحرانی برای رد فرض صفر باشیم. کای، فان و لی (۲۰۰۰) [۳] یک آزمون مبتنی بر بوت استرپ برای این فرضیه مطرح کردند. آزمون نسبت درستنمایی تعمیم‌یافته $(GLR)$ برای پاسخ به این نوع سؤالات توسعه یافت که فان و همکاران (۲۰۰۱) [۹] آن را ارائه دادند. فان و ژانگ (۲۰۰۰) [۹] رویکرد دیگری را بر اساس توزیع متقارن حداقل اختلاف بین تابع ضرایب برآورد شده و تابع ضرایب واقعی برای آزمون ضرایب قضیه‌ای به شکل زیر مطرح کردند:

**قضیهٔ ۲.۳.** تحت شرایط نظم در فان و ژانگ (۲۰۰۰) [۹] هنگامی که $\beta_j(.)$ یک ثابت مانند $c_j$ باشد، داریم:

$$P(T_j < x) \to exp\{-2exp(-x)\}$$

[3] Confidence Interval

[4] Bonferroni

[5] Hypothesis Test

که در آن:

$$T_j = (-2logh)^{\frac{1}{2}} (\sup_{u\in[0,1]} | \{v\hat{a}r(\hat{\beta}_j|D) \quad (10)$$
$$(\hat{\beta}_j - \hat{c}_j - \widehat{bias}(\hat{\beta})|D)\}^{\frac{1}{2}} \mid d_{\nu,n})$$

و

$$\hat{c}_j = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\beta_j(u)$$

طبق قضیه فوق برای آزمون فرض (۹) یک ناحیه رد مجانبی برای $H_0$ می‌سازیم. به‌طوری که اگر مقادیر موجود در آماره آزمون $T_j$ از مقادیر مجانبی بحرانی $c = (-log\{-0/5log(-1-\alpha)\})$ بزرگ‌تر باشد فرض صفر رد می‌شود، در غیر این صورت دلیلی برای رد آن وجود ندارد.

اثبات قضایای ۱ و ۲ در فان و ژانگ (۲۰۰۰) [۹] موجود است.

## ۴ مطالعات عددی

در این بخش داده‌های ۲۸ ساله شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی در مناطق شهری ایران که در اندازه‌گیری شاخص تورم نقش دارند در سال‌های (۱۳۶۸ تا ۱۳۹۶) از شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی منتشرشده توسط بانک مرکزی [۱] در شهریورماه ۱۳۹۷ استفاده نموده‌ایم. این داده‌ها شامل دوازده مؤلفه می‌باشند که عبارت‌اند از خوراکی‌ها و آشامیدنی‌ها، دخانیات، پوشاک و کفش، مسکن و آب و برق و گاز و سایر سوخت‌ها، اثاث و لوازم و خدمات مورداستفاده در خانه ، بهداشت و درمان، حمل‌ونقل، ارتباطات، تفریح و امور فرهنگی، تحصیل، رستوران و هتل، کالاها و خدمات متفرقه. در این بخش از نرم‌افزار آماری $R$ استفاده‌شده است. پس‌ازاینکه مدل با ضرایب متغیر برای این داده‌ها اعمال شود، تمامی این متغیرها به یک متغیر شاخص که زمان است وابسته خواهند بود. یکی از تعاریف مدل‌های با ضریب متغیرخطی به‌صورت زیر است:

$$Y_i(u_{ij}) = x_1(u_{1j})^T\beta(u_{1j}) + x_2(u_{2j})^T\beta(u_{2j})$$
$$+ \ldots + x_{12}(u_{12j})^T\beta(u_{12j})$$

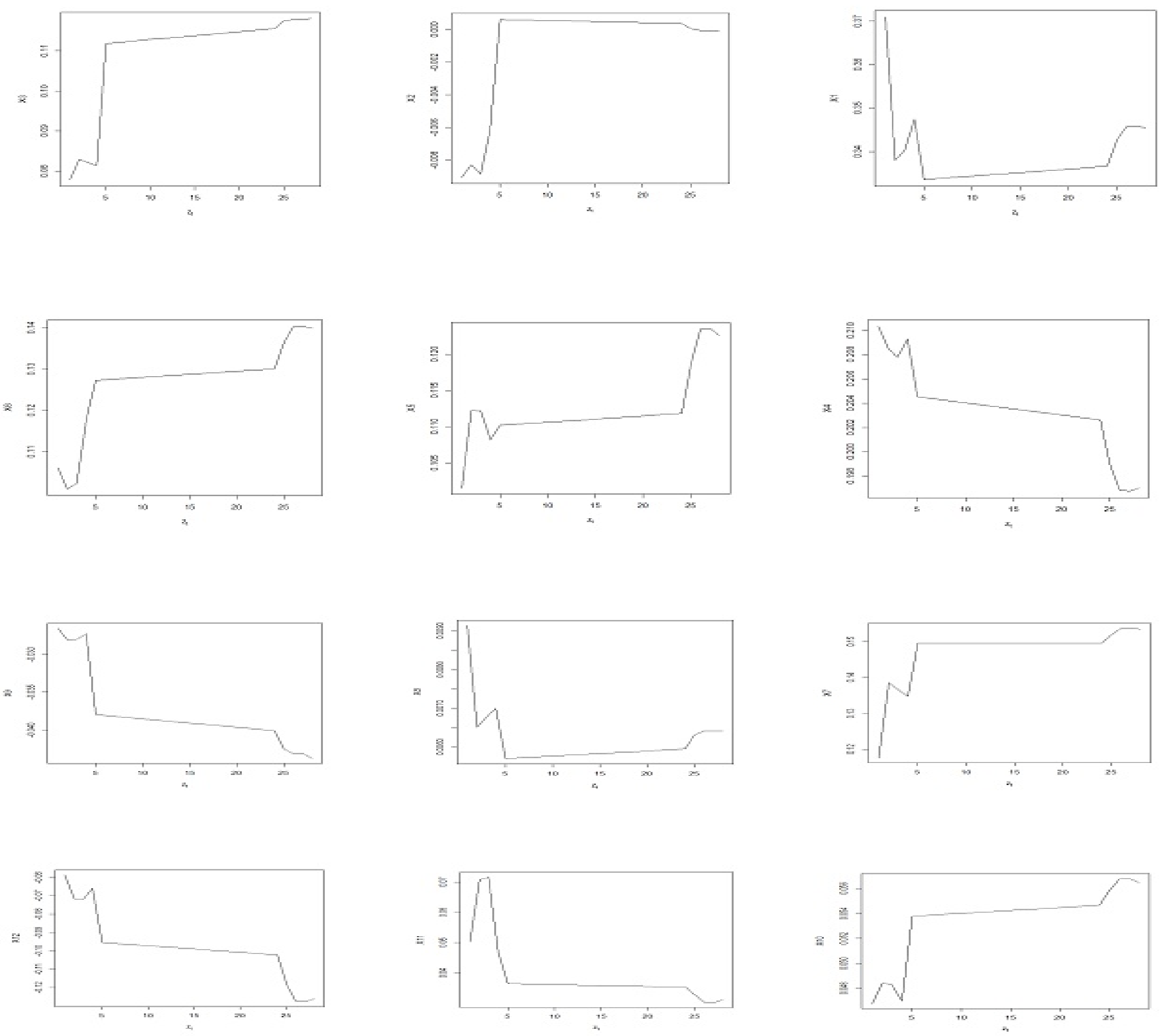
که در آن $\beta(u) = (\beta_1(u), \beta_2(u), \ldots, \beta_{12}(u))^T$ یک بردار $m$ بعدی از توابع هموار $u$ می‌باشد و $j = 1, 2, \ldots, 28$ است. هدف پیدا کردن برآورد ناپارامتری $\beta(u)$ و نیز یافتن متغیرهای $x_k(u)$ به ازای ضریب عملکرد غیر صفر $\beta_k(u)$ می‌باشد.

با توجه به این که هر کدام از ضرایب به عامل زمان بستگی دارند، ضرایب موجود تابعی از زمان هستند و هر کدام از آن‌ها ۲۸ مقدار دارند که با تغییر سال تغییر خواهند کرد که برای صرفه‌جویی در حجم نوشتار میانگین برآورد این ضرایب را درج می‌کنیم. میانگین برآورد ضرایب و میانگین کران‌های پایین و بالا برای این مؤلفه‌ها در جدول ۱ نشان داده‌شده‌اند.

**جدول ۱.** میانگین برآورد ضرایب و کران‌های پایین و بالا

| متغیر | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|
| میانگین برآورد ضرایب | ۰/۳۳۸۴ | −۰/۰۰۰۸ | ۰/۱۰۹۶ |
| میانگین کران پایین | ۰/۳۱۵۳ | −۰/۰۰۶۴ | ۰/۰۸۷۱ |
| میانگین کران بالا | ۰/۳۶۱۵ | ۰/۰۰۴۸ | ۰/۱۳۲۱ |
| متغیر | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ |
| میانگین برآورد ضرایب | ۰/۲۰۳۴ | ۰/۱۱۲۲ | ۰/۱۲۷۰ |
| میانگین کران پایین | ۰/۱۸۶۵ | ۰/۰۸۳۲ | ۰/۱۰۲۳ |
| میانگین کران بالا | ۰/۲۲۰۳ | ۰/۱۴۱۲ | ۰/۱۵۱۷ |
| متغیر | $X_7$ | $X_8$ | $X_9$ |
| میانگین برآورد ضرایب | ۰/۱۴۷۵ | ۰/۰۰۶۱ | −۰/۰۳۷۹ |
| میانگین کران پایین | ۰/۱۳۳۱ | ۰/۰۰۳۰ | −۰/۰۵۲۴ |
| میانگین کران بالا | ۰/۱۶۱۹ | ۰/۰۰۹۱ | −۰/۰۲۳۵ |
| متغیر | $X_{10}$ | $X_{11}$ | $X_{12}$ |
| میانگین برآورد ضرایب | ۰/۰۵۳۵ | ۰/۰۳۸۶ | −۰/۰۹۸۰ |
| میانگین کران پایین | ۰/۰۴۲۵ | ۰/۰۱۱۳ | −۰/۱۴۷۳ |
| میانگین کران بالا | ۰/۰۶۴۶ | ۰/۰۶۵۹ | −۰/۰۴۸۶ |

جدول ۱ نشان می‌دهد که میانگین برآورد ضرایب برای متغیرهای دوم، نهم و دوازدهم منفی است و سایر برآورد ضرایب مثبت هستند که بیانگر این مطلب است که تأثیر سه مؤلفه دوم، نهم و دوازدهم بر متغیر پاسخ که شاخص تورم است در طی این ۲۸ سال معکوس بوده و تأثیر مؤلفه‌های دیگر مثبت است. به دلیل منفی بودن این سه متغیر، حتی میانگین کران‌های پایین و بالا نیز برای آن‌ها منفی است. این مطلب نشان می‌دهد که طی این ۲۸ سال از میزان تأثیر این سه مؤلفه بر تورم کاسته شده و به دیگر مؤلفه‌ها افزوده‌شده است یعنی مصرف کنندگان مجبور شده‌اند در سبد مصرفی سهم کالاهایی که می توانند از مصرف آن‌ها خودداری کنند را با دیگر کالاهای ضروری‌تر جایگزین نمایند. این مطلب خصوصاً برای دو متغیر نهم یعنی تفریح و امور فرهنگی و کالاها و خدمات متفرقه که کران‌های بازه اطمینان (نمودار ۲) برای ضرایب آن‌ها منفی است به‌طور معنی‌داری قابل‌مشاهده است. چون هر کدام از متغیرها خود شامل ۲۸ مقدار هستند، به همین دلیل در جدول ۱ از اصطلاح میانگین استفاده‌شده است زیرا هر کدام از ضرایب شامل ۲۸ مقدار مختلف هستند. به همین صورت مقادیر کران‌های بالا و پایین نیز هر کدام شامل ۲۸ برآورد هستند. برای مثال ضریب اول ۲۸ مقدار برآورد شده دارد که ۲۸ مقدار کران بالا و ۲۸ مقدار نیز برای کران پایین آن وجود دارد. نمودارهای دوازده متغیر به‌صورت نمودار ۱ است:

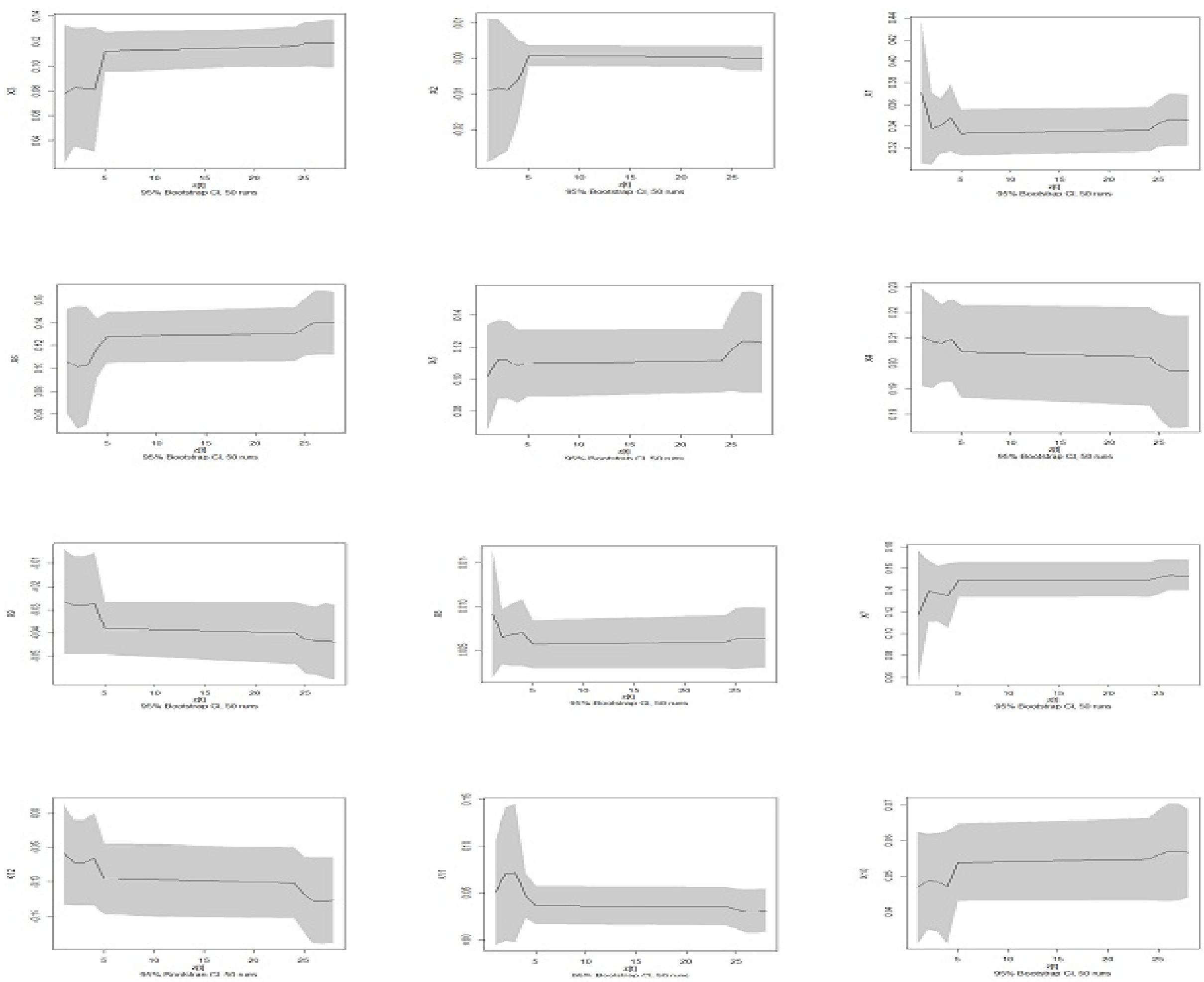


**شکل ۱.** نمودار متغیرها

با توجه به کم بودن حجم داده‌ها روند خطی و یا غیرخطی بودن داده‌ها به‌خوبی نشان داده نمی‌شوند. برای بازه اطمینان نیز می‌توان نمودارهای ۱۲ متغیر را با اطمینان‌های مختلف که معمولاً ۹۵ درصد را در نظر گرفته می‌شود، رسم کرد. یکی از روش‌هایی که در نرم‌افزار مورداستفاده برای مدل‌های با ضرایب متغیر مورداستفاده قرار می‌گیرد از روش بوت استرپ است که نمودار ۲ این بازه اطمینان‌ها و با ۵۰ بار تکرار بوت استرپ در نمودار ۲ قابل‌مشاهده است.

سه روش برای به دست آوردن بازه اطمینان در مدل‌های با ضرایب متغیر وجود دارد که منطقی‌ترین روش برای محاسبه بازه اطمینان روش بوت استرپ است. معمولاً در روش بوت استرپ هرچه تعداد اجراها بیشتر باشد، نتیجه دقیق‌تری به دست خواهد آمد. یکی از روش‌هایی که جهت برازش نمودار داده‌ها استفاده می‌شود، روش اسپلاین مکعبی است. در نمودار ۳ با استفاده از روش اسپلاین مکعبی نمودار داده‌ها با ۵ درجه آزادی برازش شده‌اند.

هرچه درجه آزادی بیشتر باشد نمودار صاف‌تر و هموارتر خواهد بود. در نمودار ۳ علاوه بر نقاط رسم شده ، دو خط سیاه و قرمز وجود دارد که خط سیاه برآورد معمولی را نشان می‌دهد و خط قرمز برآورد برازش شده اسپلاین مکعبی می‌باشد. در نمودار۳ شکل متغیرهای دوم و هشتم اختلاف بین برازش معمولی و روش برازش اسپلاین مکعبی وجود دارد و در شکل سایر متغیرها این اختلاف بسیار کم است. در حالت کلی برازش به روش اسپلاین مکعبی برای نمودارهایی که دارای خطوط شکسته هستند مانند شکل متغیر دوم و هشتم ، بسیار بهتر از برآورد معمولی عمل می‌کند.



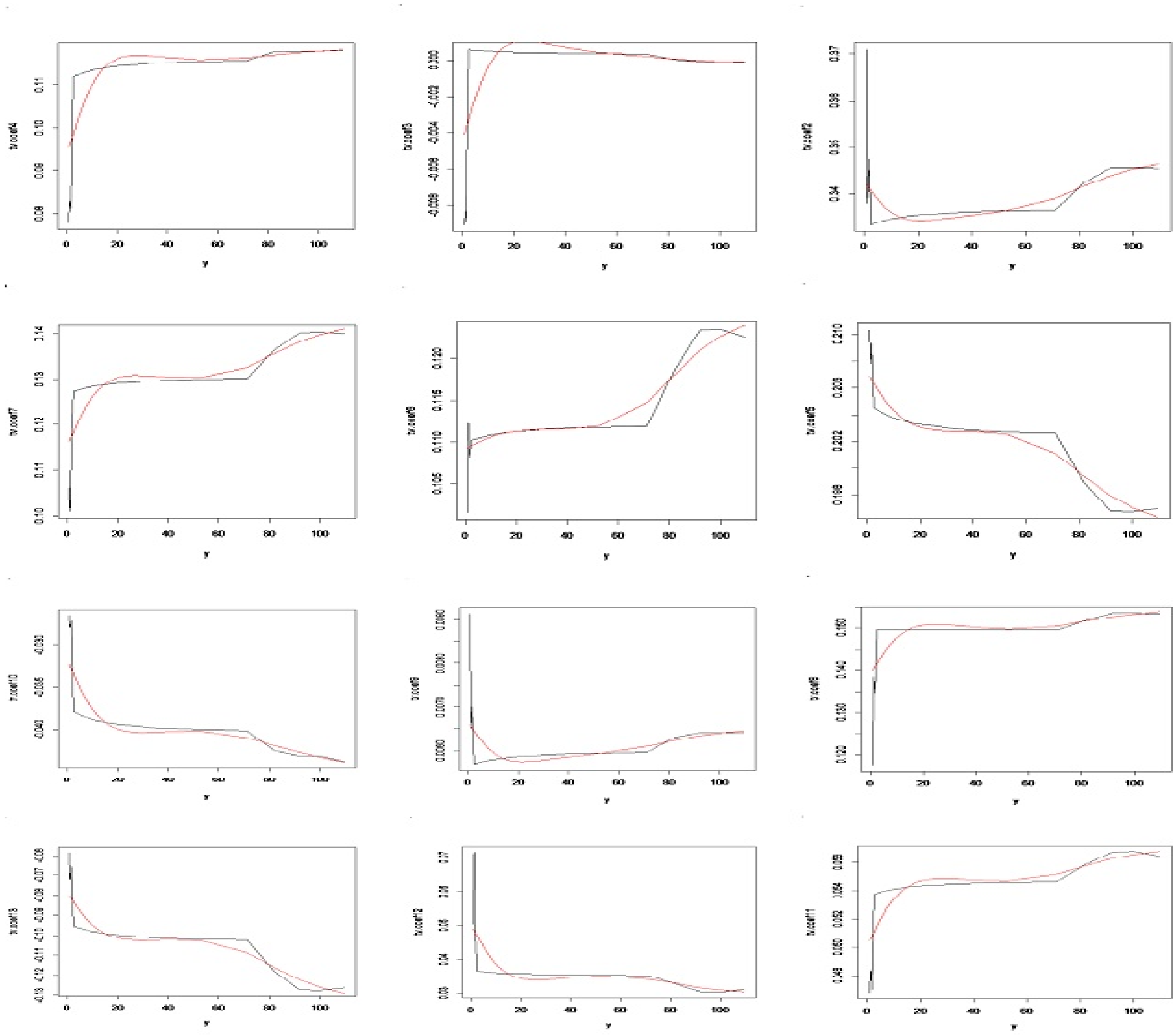
**شکل ۲.** بازه اطمینان ۰٫۹۵ با استفاده از شبیه‌سازی بوت استرپ با ۵۰ اجرا

یک نکته بسیار مهم در مدل‌های با ضرایب متغیر این است که آیا ضرایبی که به‌دست‌آمده‌اند متغیر هستند یا خیر؟ اگر ضرایب متغیر نباشند باید تمامی ۲۸ مقدار باهم برابر باشد. برای دیدن این مسئله می‌توان از نمودار جعبه‌ای کمک گرفت زیرا این نمودار با رسم تمام ۲۸ مقدار به‌راحتی نشان می‌دهد که ضرایب ثابت هستند یا خیر. اگر ضرایب ثابت باشند به‌جای نمودار جعبه‌ای یک نقطه رسم خواهد شد و اگر ضرایب متغیر باشند دارای مقادیری مانند ماکسیمم، مینیمم، چارک اول، چارک سوم و میانه داده‌ها است. در شکل ۴ نمودار جعبه‌ای ۱۲ متغیر رسم شده است. از نمودار جعبه‌ای رسم شده در شکل ۴ می‌توان متغیر بودن ضرایب مدل در این داده‌ها را به‌وضوح مشاهده نمود. در نمودارهای جعبه‌ای رسم شده، برخی از نقاط به‌صورت توخالی نشان داده‌شده‌اند که داده‌های پرت و دورافتاده را مشخص می‌کنند. تنها متغیرهای چهارم، هشتم و دهم شامل داده پرت نیستند و در بقیه نمودارها داده پرت وجود دارد.

## بحث و نتیجه‌گیری

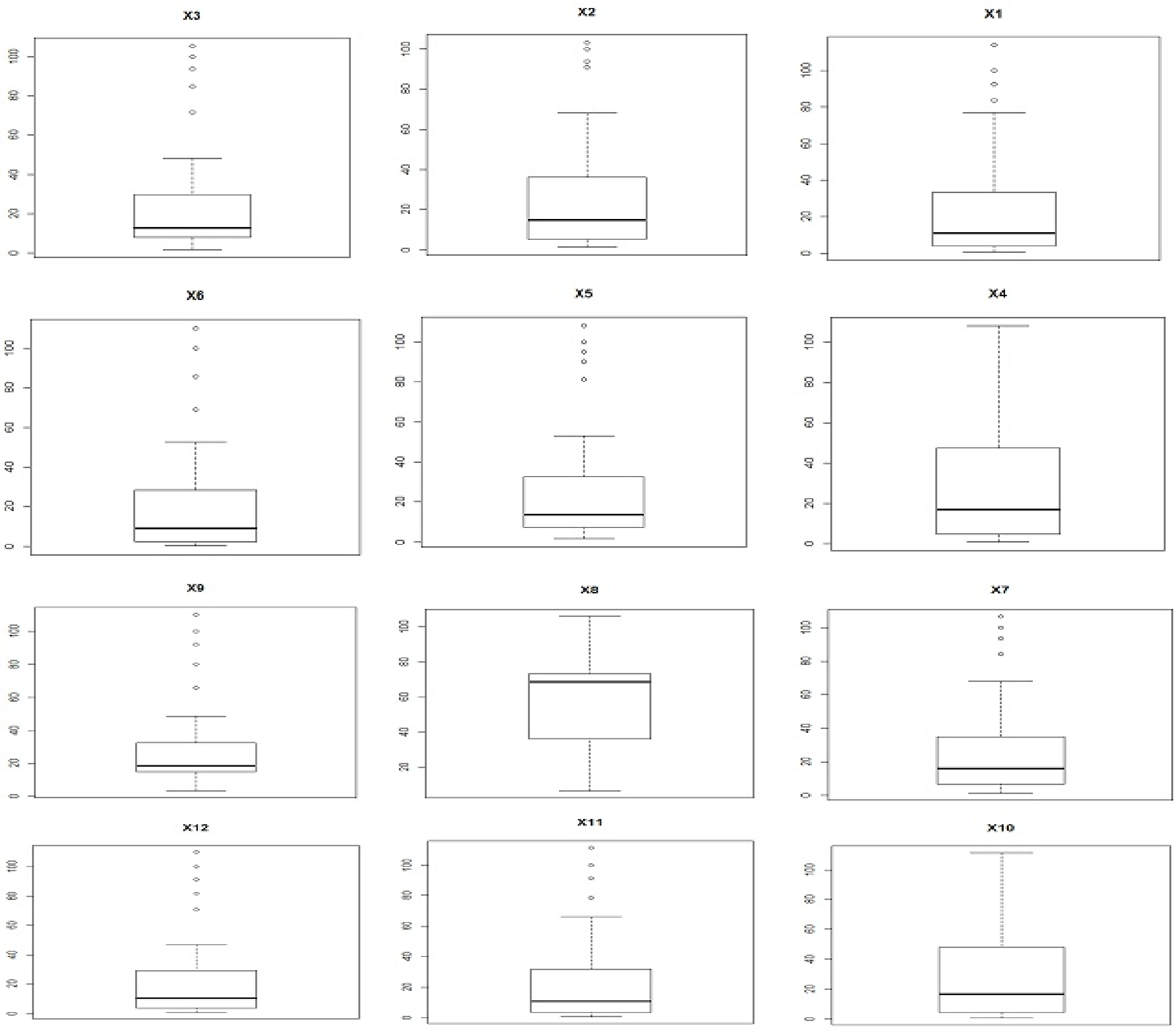
گاهی اوقات برای تحلیل داده‌ها ممکن است برای اجتناب از پیچیدگی، از مدل‌های با ضرایب ثابت استفاده شود درحالی‌که این پیش‌فرض برقرار نباشد که سبب نامعتبر شدن نتایج می‌شود. یکی از بهترین روش‌ها برای برازش مدل‌های با ضرایب متغیر، استفاده از روش اسپلاین مکعبی است که درجات آزادی مختلفی می‌توان برای آن‌ها در نظر گرفت، درجات آزادی

بزرگ‌تر علیرغم افزایش بار محاسباتی، انعطاف‌پذیری اسپلاین را بیشتر و برازش هموارتری تولید می‌کند.



**شکل ۳.** نمودار هموارشده با استفاده از اسپلاین مکعبی

در داده‌های واقعی نرخ تورم دیده می‌شود که استفاده از مدل‌های با ضرایب متغیر می‌تواند سبب تفسیرپذیری نتایج برحسب زمان شود که تأمین‌کننده اهداف مطالعات زیادی ازاین‌دست می‌تواند باشد. مضاف بر اینکه نیاز به تأمین پیش‌فرض‌های محدودکننده در سرهای زمانی را نیز ندارند. ما برای این داده‌ها از مدل‌های پنل یا طولی و نیز از مدل‌های آرچ و گارچ و مشتقات آن‌ها مثل گارچ نمایی شده یا -□ گارچ استفاده کردیم اما هیچ‌کدام برازش مناسبی را فراهم نکردند ولی برای صرفه‌جویی در حجم مطالب از آوردن جزییات آن‌ها خودداری کردیم. همچنین با استفاده از نمودارهای جعبه‌ای علاوه بر آزمون فرض می‌تواند متغیر بودن ضرایب مدل را به‌راحتی بررسی نمود.




**شکل ۴.** نمودار جعبه‌ای متغیرها

# مراجع

[۱] شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی در مناطق شهری ایران شهریورماه ۱۳۹۷، بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران، مدیریت کل آمارهای اقتصادی، اداره آمار اقتصادی، دایره شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی

[2] Brumback, B. and Rice, J. (1998). Smoothing spline models for the analysis of nested and crossed samples of curves, J. Amer.*Statist. Assoc.*, **93**, 961–976.

[3] Cai, Z., Fan, J. and Li, R. (2000). Efficient estimation and inferences for varying-coefficient models. J. Amer. *Statist. Assoc.*, **95**, 888-902.

[4] Chiang, C. T., Rice, J. A. and Wu, C. O. (2001). Smoothing spline estimation for varying coefficient models with repeatedly measured dependent variables.*IEEE Trans.Journal of the American Statistical Association*; **96(454)** , 605-

619.

[5] Cleveland, W. S. and Grosse, E. (1991). Computational methods for local regression. *Statistics and computing*, **1(1)**, 47-62.

[6] Fan, J. and Gijbels, I. (1995). Data-driven bandwidth selection in local polynomial fitting: variable bandwidth and spatial adaptation, Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological).*IEEE Trans. The annals of Statistics*; **57(2)** , 371-394.

[7] Fan, J. and Zhang, W., (1999). Statistical estimation in varying coefficient models.*IEEE Trans. Statistical estimation in varying coefficient models;The annals of Statistics*, **27(5)**, 1491-1518.

[8] Fan, J. and Zhang, W. (2000). Simultaneous confidence bands and hypothesis testing in varying-coefficient models. *IEEE Trans. Scandinavian Journal of Statistics*, **27(4)**, 715-731.

[9] Fan, J., Zhang, C.M. and Zhang, J. (2001). Generalized likelihood ratio statistics and Wilks phenomenon. *The Annals of Statistics*,**29**,153–193.

[10] Hastie, T. and Tibshirani, R. (1993). Varying-coefficient models.*IEEE Trans. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, **55(4)**, 757-779.

[11] Hoover, D. R., Rice, J. A., Wu, C. O. and Yang, L. P. (1998). Nonparametric smoothing estimates of time-varying coefficient models with longitudinal data. *Biometrika*; **85(4)** , 809-822.

[12] Huang, J.Z. and Shen, H., (2004). Functional coefficient regression models for nonlinear time series: A polynomial spline approach. *Scandinavian Journal of Statistics*, **31**, 515–534.

[13] Huang, J.Z., Wu, C. O. and Zhou, L. (2002). Varying-coefficient models and basis function approximations for the analysis of repeated measurements. *Biometrika*, **89**, 111-128.

[14] Wang. Y, (2007). *Varying-Coefficient Models: New Models, Inference Procedures and Applications*, PhD Dissertation.

[15] Wu, C. O., Chiang, C. T. and Hoover, D. R. (1998). Asymptotic confidence regions for kernel smoothing of a varying-coefficient model with longitudinal data. *IEEE Trans.Journal of the American statistical Association*, **93(444)**, 1388-1402.

[16] Zhang, W. and Lee, S. Y. (2000). Variable bandwidth selection in varying-coefficient models.*IEEE Trans Journal of Multivariate Analysis*, **74(1)**, 116-134.