ایجاد فاصلهٔ اطمینان برای چندک‌های توزیع نرمال در یک و دو جامعه

احد ملک‌زاده،[۱] رعنا شهابی [۲]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۴
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۲۱

چکیده:
در این مقاله، به‌منظور به دست آوردن کوتاه‌ترین فاصلهٔ اطمینان یا فاصلهٔ اطمینان عمومی برای چندک‌های توزیع نرمال در حالت یک جامعه‌ای، یک کمّیت محوری که دارای توزیع t نامرکزی است. در حالت دو جامعه نرمال مستقل، به ایجاد فاصلهٔ اطمینان برای اختلاف چندک‌ها بر اساس کمّیت محوری تعمیم‌یافته می‌پردازیم و روشی ساده برای به دست آوردن صدک‌های آن معرفی می‌شود که بر اساس آن می‌توان فاصلهٔ اطمینانی کوتاه‌تر نیز به دست آورد. همچنین عملکرد روش‌های ارائه شده با استفاده از شبیه‌سازی و مثال کاربردی، مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

واژه‌های کلیدی: صدک، تقریب پایهٔ نرمال اصلاح‌شده،کمّیت محوری تعمیم‌یافته، توزیع نرمال، کوتاه‌ترین فاصلهٔ اطمینان.

۱ مقدمه

در آمار، میانگین و میانه به‌عنوان دو معیار مکانی مهم برای بررسی یک جامعه یا مقایسه دو یا چند جامعه به شمار می‌آیند. با این حال، کل توزیع جامعهٔ آماری توسط این دو معیار تعیین نمی‌شود. می‌توان به‌راحتی نمونه‌هایی پیدا کرد که در آن میانه و میانگین چندین توزیع توافق دارند، اما اشکال توزیع‌ها متفاوت است که برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۶] مراجعه کنید. در بعضی موارد، مقایسهٔ یک چندک مشخص (مانند چارک اوّل و سوم) امری متداول است. به‌عنوان مثال، در یک مطالعه پزشکی برای مقایسه یک داروی جدید با یک استاندارد، پاسخ اکثریت بیماران مهم‌تر از پاسخ متوسط است [۱۰]. همچنین موارد مشابهی در مسائل زیست پزشکی [۲]، تشخیص پزشکی [۱۳] و صنعت سلامتی [۱۶] در بارهٔ کاربرد و اهمیت چندک‌ها می‌توان مشاهده کرد.

[۱۲] آزمون ناپارامتری برای مقایسه چندک دو توزیع پیوسته مستقل معرفی کردند و سپس توسط [۱۵] این روش را تصحیح کرد. همچنین [۲] یک فاصلهٔ اطمینان توزیع آزاد تقریبی برای اختلاف چندک دو جامعه در توزیع‌های پیوسته ارائه کردند که تصحیح‌شدهٔ آن در سال ۱۹۹۰ توسط بیرستول معرفی شد [۳]. برای آزمون برابری چندک دو توزیع نرمال با استفاده از روش ولچ و بر اساس تعداد نمونه زیاد [۴] و بر اساس آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته [۶] روش‌هایی را طراحی کردند. همچنین [۸، ۱۰] به استنباط در بارهٔ نسبت چندک‌های دو جامعه نرمال پرداختند. برای استنباط اختلاف چندک‌های دو جامعه مستقل نرمال [۹] کمّیت محوری و p-مقدار تعمیم‌یافته را پیشنهاد دادند. [۱] یک آزمون نسبت ماکسیمم درست‌نمایی برای انجام آزمون برابری چندک‌ها در بیش از دو جامعه نرمال مستقل توسعه دادند. همچنین برای به دست آوردن فاصلهٔ اطمینان و انجام آزمون فرضیهٔ آماری برای چندک‌های توزیع نرمال در حالت یک جامعه‌ای، [۵] یک کمّیت محوری معرفی کردند و صدک‌های آن را با روش‌های مختلف تقریب زدند.

در این مقاله به‌منظور به دست آوردن کوتاه‌ترین فاصلهٔ اطمینان (و انجام آزمون فرضیهٔ آماری) برای چندک‌های توزیع نرمال یک کمّیت محوری معرفی می‌شود که دارای توزیع t با درجهٔ آزادی معلوم و پارامتر نامرکزی مشخص است. در

[۱]، هیأت علمی گروه آمار، دانشکده ریاضی دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی
[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد گروه آمار دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

ادامه، به بحث پیرامون ایجاد کوتاه‌ترین فاصلهٔ اطمینان دوطرفه برای چندک‌های توزیع نرمال خواهیم پرداخت. سپس با استفاده از مفهوم کمّیت محوری تعمیم‌یافته برای اختلاف چندک‌های دو توزیع نرمال مستقل فاصلهٔ اطمینان به دست آورده می‌شود. با بهره از روش تقریب پایه‌-نرمال اصلاح‌شده (MNA) در [۱۱] معرفی شده است، برآورد تقریبی صدک‌های این کمیت تعمیم‌یافته را به دست آورده می‌شود. همچنین فاصلهٔ اطمینان با طول کوتاه‌تر برای اختلاف چندک‌ها ارائه می‌شود و عملکرد این روش‌ها با استفاده از شبیه‌سازی و مثال کاربردی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در بخش دوم به تعریف مسئله و معرفی کمّیت محوری جدید پرداخته می‌شود. همچنین فاصلهٔ اطمینان عمومی و کوتاه‌ترین فاصلهٔ اطمینان برای چندک‌های توزیع نرمال را ارائه خواهد شد. در بخش سوم، کمّیت محوری تعمیم‌یافته مربوط به اختلاف چندک‌های توزیع نرمال پیشنهاد و نحوهٔ برآورد صدک‌های آن مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین فاصلهٔ اطمینان با طول فاصلهٔ کوتاه‌تر برای این منظور معرفی می‌شود. عملکرد این فواصل اطمینان با استفاده از شبیه‌سازی در بخش چهارم مورد بررسی قرار خواهند گرفت و با ذکر دو مثال از داده‌های واقعی در بخش پنجم، عملکرد روش‌های ارائه شده نمایش داده می‌شود. در بخش آخر دستاوردهای مقاله به اختصار شرح داده خواهد شد.

۲ ایجاد فاصلهٔ اطمینان برای چندک‌های نرمال

فرض کنید $Y_1,\dots,Y_n$ یک نمونهٔ تصادفی nتایی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 یعنی $N(\mu,\sigma^2)$، باشند. چندک γ-ام توزیع نرمال برابر است با $Q_\gamma=\mu+z_\gamma\sigma$، که در آن z_γ، چندک γ-ام توزیع نرمال استاندارد است. برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی نااریب پارامترهای μ و σ^2 به‌ترتیب $\bar{Y}=\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$ و $S^2=\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i-\bar{Y})^2}{(n-1)}$ هستند که این دو برآوردگر مستقل از یکدیگرند. همچنین برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی و نااریب با کمترین واریانس (UMVUE) پارامتر Q_γ، برابر است با $\hat{Q}_\gamma=\bar{Y}+az_\gamma S$ که در آن $a=\sqrt{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})$ و واریانس آن برابر است با $\sigma^2((\frac{1}{n}+z_\gamma^2(a^2-1))$ [۵]. همان‌طور که ملاحظه می‌شود Q_γ به‌عنوان یک پارامتر مکانی، ترکیب خطی از پارامترهای جامعه است. بنا بر این، عبارت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} t_{n,\gamma} &= \frac{\bar{Y}-Q_\gamma}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{n}(\bar{Y}-\mu)-\sigma\sqrt{n}z_\gamma}{S} \\ &= \frac{Z\gamma-\sigma\sqrt{n}z_\gamma}{\sigma\sqrt{\frac{U}{(n-1)}}}=\frac{(Z-\sqrt{n}z_\gamma)}{\sqrt{\frac{U}{(n-1)}}}\sim t_{(n-1,-\sqrt{n}z_\gamma)}, \end{aligned} \tag{1}$$

که درآن Z و U دو متغیر تصادفی مستقل به‌ترتیب دارای توزیع نرمال استاندارد و توزیع خی‌دو با $n-1$ درجهٔ آزادی $\chi^2_{(n-2)}$ هستند و $t_{(r,\nu)}$ نشان‌دهندهٔ توزیع t با r درجهٔ آزادی و پارامتر نامرکزی ν است. بنا بر این به‌وضوح می‌توان از $t_{n,\nu}$ به‌عنوان یک کمّیت محوری برای انجام استنباط آماری شامل فاصلهٔ اطمینان دقیق و انجام آزمون فرضیهٔ آماری چندک γ-ام توزیع نرمال بهره برد. برای یافتن صدک α-ام توزیع $t_{(n-1,-\sqrt{n}z_\gamma)}$ $(t_{n,\gamma;\alpha})$، می‌توان از روش وارون تابع توزیع t نامرکزی بهره برد. با توجه به کمّیت محوری در رابطهٔ (۱)، فاصلهٔ اطمینان دوطرفه عمومی در سطح $(1-\alpha)$ برای پارامتر Q_γ با انتخاب صدک‌های $t_{n,\gamma;\frac{\alpha}{2}}$ و $t_{n,\gamma;1-\frac{\alpha}{2}}$ به شکل زیر است:

$$(\bar{Y}-t_{n,\gamma;1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{Y}-t_{n,\gamma;\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}), \tag{2}$$

یک ویژگی مناسب در به دست آوردن فاصلهٔ اطمینان دوطرفه، کمتر بودن طول آن فاصله است، به‌عبارتی برای به دست آوردن کوتاه‌ترین فاصلهٔ اطمینان مقادیر α_1 و α_2 را طوری به دست می‌آوریم که عبارت‌های

$$P(t_{n,\gamma;\alpha_1}\le t_{n,\gamma}\le t_{n,\gamma,1-\alpha_2})=1-\alpha,$$

و $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$ و تفاضل $t_{n,\gamma,1-\alpha_2}-t_{n,\gamma;\alpha_1}$ کمترین مقدار شوند. فرض کنید مینیمم مقدار α_1 را با $\alpha_1^\star$ بنشان دهیم، بنا بر این $\alpha_2^\star=\alpha-\alpha_1^\star$ می‌شود. بنا بر این، کوتاه‌ترین فاصلهٔ اطمینان برای پارامتر Q_γ برابر است با:

$$(\bar{Y}-t_{n,\gamma;1-\alpha_2^\star}\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{Y}-t_{n,\gamma;\alpha_1^\star}\frac{S}{\sqrt{n}}). \tag{3}$$

۳ فاصلهٔ اطمینان اختلاف چندک‌های توزیع‌های نرمال مستقل

در این بخش روش به دست آوردن فاصلهٔ اطمینان برای اختلاف چندک‌های دو توزیع نرمال مستقل معرفی می‌شود. بدین منظور با ارائهٔ یک کمّیت محوری تعمیم‌یافته به نحوهٔ برآورد صدک‌های آن به روش‌های معمولی و MNA پرداخته می‌شود. همچنین یک فاصلهٔ اطمینان با طول کمتر ارائه خواهد شد.

۱.۳ کمّیت محوری تعمیم‌یافته

فرض کنید $Y_{i1},\dots,Y_{in_i}$ نمونه‌های تصادفی از توزیع $N(\mu_i,\sigma_i^2)$ برای $i=1,2$ باشند، با استفاده از کمّیت محوری تعمیم‌یافته ارائه‌شده در [۱۷] برای دو پارامتر میانگین و واریانس توزیع نرمال، کمّیت محوری تعمیم‌یافته‌ای برای $Q_{i\gamma}=\mu_i+z_\gamma\sigma_i$ به‌شکل زیر معرفی می‌شود:

$$R_{Q_{i\gamma}}=\bar{y}_i+\sqrt{(1-\frac{1}{n_i})s_i^2}(\frac{\sqrt{n_i}z_\gamma-Z_i}{\sqrt{U_i}}),i=1,2.$$

کمّیت محوری تعمیم‌یافته مربوط به $Q_{1\gamma}-Q_{2\gamma}$ برابر است با:

$$\begin{aligned}R_{12,\gamma}=R_{Q_{1\gamma}}-R_{Q_{2\gamma}}=&\bar{y}_1-\bar{y}_2\\&+\Big[\sqrt{(1-\frac{1}{n_2})s_2^2}(\frac{\sqrt{n_2}z_\gamma-Z_2}{\sqrt{U_2}})\\&-\sqrt{(1-\frac{1}{n_1})s_1^2}(\frac{\sqrt{n_1}z_\gamma-Z_1}{\sqrt{U_1}})\Big]\end{aligned}\qquad(۴)$$

که درآن $Z_i\sim N(0,1)$ و $U_i\sim\chi^2_{(n_i-1)}$ مستقل و همچنین $\bar{y}_i$ و s_i^2 مقادیر مشاهده‌شده $\bar{Y}_i$ و s_i^2 برای $i=1,2$ هستند. برای یافتن توزیع $R_{12,\gamma}$، باید متغیرهای تصادفی Z_i و U_i تولید شوند و بر اساس آنها مقدار رابطهٔ (۴) محاسبه می‌شود و با تکرار این عمل در دفعات زیاد (M مرتبه)، توزیع $R_{12,\gamma}$ را به‌صورت تقریبی و همچنین مقدار تقریبی از صدک β-ام آن، یعنی $R_{12,\gamma;\beta}$، به دست می‌آیند. بنا بر این فاصلهٔ اطمینان $100(1-\alpha)$ درصد برای $Q_{1\gamma}-Q_{2\gamma}$ بر اساس کمّیت محوری تعمیم‌یافته به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$(R_{12,\gamma;\frac{\alpha}{2}},R_{12,\gamma;1-\frac{\alpha}{2}}).\qquad(۵)$$

۲.۳ تقریب صدک $R_{12,\gamma;\beta}$

همان‌طور که بحث شد، برای به دست آوردن حدود در عبارت (۵) از روش‌های عددی استفاده می‌شود. در این‌جا با بیان روش تقریب پایه نرمال اصلاح‌شده، شکل صریحی برای تقریب صدک‌های کمّیت محوری تعمیم‌یافته در رابطهٔ (۴) به دست می‌آید. این روش در [۱۱] برای تقریب صدک توزیع ترکیب خطی متغیرهای تصادفی مستقل ارائه شده است که در ادامه به اختصار توضیح داده می‌شود.

فرض کنید $T_1,\dots,T_k$ متغیرهای پیوسته تصادفی مستقل باشند که لزوماً دارای توزیع یکسانی نیستند و با فرض آن‌که $T_{i;\alpha}$، صدک α-ام متغیر تصادفی T_i و امید ریاضی $E(T_i)$ برای $i=1,\dots,k$ وجود داشته باشند، داریم $T=\sum_{i=1}^k w_iT_i$ که در آن w_iها ضرایب ثابت و معلومی هستند. در این صورت تقریب صدک α-ام متغیر تصادفی T یعنی T_α، به‌صورت زیر است:

$$T_\alpha\simeq\begin{cases}\sum_{i=1}^k w_iE(T_i)-\sqrt{\sum_{i=1}^k w_i^2(E(T_i)-T_i^\star)^2}, & 0<\alpha\le 0.5,\\ \sum_{i=1}^k w_iE(T_i)-\sqrt{\sum_{i=1}^k w_i^2(E(T_i)-T_i^\star)^2}, & 0.5<\alpha\le 1,\end{cases}$$

که اگر $w_i>0$، آن‌گاه $T_i^\star=T_{i;\alpha}$

و اگر $w_i<0$ آن‌گاه $T_i^\star=T_{i;1-\alpha}$.

وی نشان داد تقریب فوق برای متغیرهای تصادفی مستقل نرمال مقدار دقیق نتیجه می‌دهد. کریشنامورتی این تقریب را تحت عنوان تقریب پایه-نرمال اصلاح‌شده (MNA) معرفی کرد. برای جزئیات بیشتر به [۱۱] مراجعه کنید.

حال می‌توان با دقت در رابطهٔ (۴) کمّیت محوری تعمیم‌یافته را به‌صورت زیر نشان داد:

$$R_{12,\gamma}=\bar{y}_1-\bar{y}_2+\left[\frac{s_2}{\sqrt{n_2}}t_{n_2,\gamma}-\frac{s_1}{\sqrt{n_1}}t_{n_1,\gamma}\right]$$

که این کمّیت محوری تابعی خطی از $T_{12,\gamma}=\frac{s_2}{\sqrt{n_2}}t_{n_2,\gamma}-\frac{s_1}{\sqrt{n_1}}t_{n_1,\gamma}$ است. با استفاده از روش پایه-نرمال اصلاح‌شده کریشنامورتی (۲۰۱۶)، تقریبی صدک α-ام توزیع $T_{12,\gamma}$ یعنی

$t_{12,\gamma;\alpha}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$t_{12,\gamma;\alpha} \simeq \begin{cases} \frac{s_2}{\sqrt{n_2}} r_{n_2,\gamma} - \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} r_{n_1,\gamma} - \Big[\frac{s_2^2}{n_2}(r_{n_2,\gamma} - t_{n_2,\gamma;\alpha})^2 + \frac{s_1^2}{n_1}(r_{n_1,\gamma} - t_{n_1,\gamma;\alpha})^2 \Big]^{\frac{1}{2}}, & 0 < \alpha \leq 0.5, \\ \frac{s_2}{\sqrt{n_2}} r_{n_2,\gamma} - \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} r_{n_1,\gamma} - \Big[\frac{s_2^2}{n_2}(r_{n_2,\gamma} - t_{n_2,\gamma;\alpha})^2 + \frac{s_1^2}{n_1}(r_{n_1,\gamma} - t_{n_1,\gamma;\alpha})^2 \Big]^{\frac{1}{2}}, & 0.5 < \alpha \leq 1, \end{cases} \tag{۶}$$

که در آن $r_{n,\gamma} = -z_\gamma \sqrt{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$ است. بنا بر این داریم:

$$R_{12,\gamma;\alpha} \simeq \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + t_{12,\gamma;\alpha},$$

و فاصلهٔ اطمینان عمومی در سطح $(1-\alpha)$ درصد برای $Q_{1\gamma} - Q_{2\gamma}$ برابر است با:

$$(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + t_{12,\gamma;\frac{\alpha}{2}}, \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + t_{12,\gamma;1-\frac{\alpha}{2}}) \tag{۷}$$

تذکر ۱.۳. اگر در محاسبه رابطهٔ (۶) به‌جای مقادیر معمول $t_{n_i,\gamma;\alpha}$ و $t_{n_i,\gamma;1-\alpha}$ مقادیر $\alpha^\star$ مربوط به کوتاه‌ترین فاصلهٔ اطمینان یعنی $t_{n_i,\gamma;\alpha^\star}$ و $t_{n_i,\gamma;1-\alpha^\star}$ برای $i = 1, 2$ را قرار گیرند، تقریب دیگر برای $t_{12,\gamma;\alpha}$ به دست می‌آید که به‌صورت $t^\star_{12,\gamma;\alpha}$ نمایش می‌دهند و با قرار دادن مقادیر $t^\star_{12,\gamma;\frac{\alpha}{2}}$ و $t^\star_{12,\gamma;1-\frac{\alpha}{2}}$ در رابطهٔ (۷) فاصلهٔ اطمینانی به‌صورت زیر برای اختلاف چارک $Q_{1\gamma} - Q_{2\gamma}$ در سطح $1 - \alpha$ به دست می‌آید:

$$(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + t^\star_{12,\gamma;\frac{\alpha}{2}}, \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + t^\star_{12,\gamma;1-\frac{\alpha}{2}}) \tag{۸}$$

تذکر ۲.۳. برای انجام آزمون فرضیهٔ آماری $\begin{cases} H_0 : Q_{1\gamma} = Q_{2\gamma} \\ H_1 : Q_{1\gamma} \neq Q_{2\gamma}, \end{cases}$ در سطح اطمینان α درصد می‌توان فرض صفر را رد کرد زمانی که مقدار صفر در فاصله اطمینان‌های به‌دست‌آمده در سطح $100(1-\alpha)$ درصد قرار نگیرد.

۴ شبیه‌سازی

برای مقایسهٔ احتمال پوشش (CP) و متوسط طول فاصلهٔ اطمینان (AL) حاصل از روابط (۵)، (۷) و (۸) از روش شبیه‌سازی مونته‌کارلو به‌کار برده می‌شود. این روش‌ها به‌ترتیب به اختصار با GCI، MNA و SMNA نمایش داده می‌شود. شایان ذکر است که برای برآورد صدک‌ها از روش تعمیم‌یافته از روش تکراری استفاده می‌شود و دو روش دیگر تقریب‌هایی هستند که از رابطهٔ (۶) به‌سادگی به دست می‌آیند. بدین منظور برای γ برابر ۰٫۰۲، ۰٫۱۰، ۰٫۷۰ و ۰٫۹۵ و تعداد نمونه‌های مختلف و مقادیر مختلف واریانس اقدام به شبیه‌سازی و ساخت فاصلهٔ اطمینان در سطح اطمینان ۹۵ درصد کردیم. نتایج شبیه‌سازی مربوط به احتمال پوشش و متوسط طول فاصلهٔ اطمینان در جداول ۳ و ۴ آورده شده اند. با توجه به این جداول نتایج زیر حاصل می‌شوند.

هر ۳ روش دارای احتمال پوششی نزدیک به سطح اطمینان در نظر گرفته شده در این مقاله، هستند. در همهٔ حالات فاصلهٔ اطمینان حاصل از رابطهٔ (۷) دارای متوسط طول کمتری است و مانند کوتاه‌ترین فاصلهٔ اطمینان در بین این ۳ روش عمل می‌کند. بنا بر این با توجه به سهولت محاسباتی و همچنین دارا بودن خصوصیات خوب در احتمال پوشش و متوسط طول اطمینان توصیه به استفاده از فاصلهٔ اطمینان در رابطهٔ (۷) می‌شود.

۵ تحلیل داده‌های واقعی

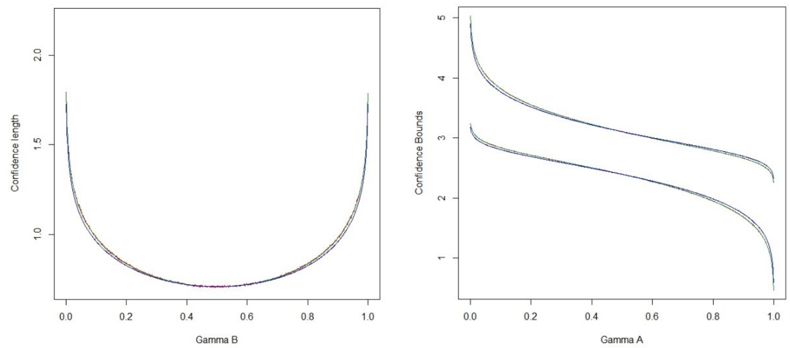
در این دو مثال که مربوط به داده‌های حاصل از دو جامعه نرمال هستند، به بررسی عملکرد ۳ فاصلهٔ اطمینان ارائه‌شده برای اختلاف چندک‌های این توزیع‌ها برای $0 < \gamma < 1$ پرداخته می‌شود.

۱.۵ داده‌های ولتاژ

هال (۱۹۵۰) میانگین (واریانس) شکست ولتاژ حاصل از ۵۰ خازن را ۶٫۷۵(۰٫۱۲۳) و میانگین (واریانس) ولتاژ خروجی حاصل از ۲۰ ترانسفورماتور را ۴٫۰۰(۰٫۵۳۰) گزارش کرد. اگر موضوع مورد علاقه اختلاف توزیع این دو تغییر ولتاژ در خازن و ترانسفورماتور باشد، آن‌گاه می‌توان از چندک‌ها استفاده کرد. بدین منظور اختلاف چندک آنها مورد بررسی قرار می‌گیرند که نتایج به‌صورت نمودارهای شکل ۱ است.

خطوط سبز، قرمز و آبی به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ روش‌های GCI، MNA و SMNA هستند. همان‌طور که به‌وضوح می‌توان

دید فاصلهٔ اطمینان حاصل از روش SMNA به‌ازای غالب γ کوتاه‌ترین است (در نمودار B پایین‌تر از دوخط دیگرقرار گرفته است) و همچنین هر ۳ فاصلهٔ اطمینان نشان می‌دهند که توزیع ولتاژ خازن به‌طور معنی‌داری متفاوت از توزیع ولتاژ خروجی ترانسفورماتور است.



شکل ۱. حدود (A) و طول (B) فاصلهٔ اطمینان‌های حاصل از ۳ روش بر روی داده‌های ولتاژ

جدول ۱. برآورد احتمال پوشش فاصلهٔ اطمینان‌های ارائه‌شده برای $\sigma_1^2 = ۱$ و مقادیر σ_2^2 به‌ترتیب برابر ۰٫۰۱، ۱، ۲ و ۵.

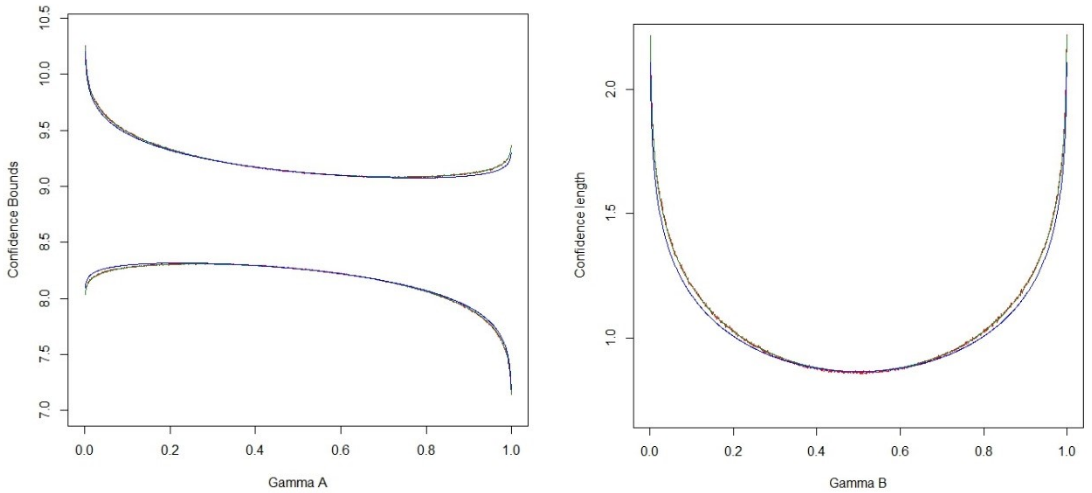
n_1, n_2	$\gamma = 0.02$			$\gamma = 0.10$			$\gamma = 0.70$			$\gamma = 0.95$		
	GCI	MNA	SMNA	GCI	MNA	SMNA	GCI	MNA	SMNA	GCI	MNA	SMNA
5, 5	0.9570	0.9575	0.9507	0.9563	0.9558	0.9519	0.9604	0.9596	0.9566	0.9537	0.9529	0.9466
	0.9552	0.9536	0.9571	0.9592	0.9584	0.9616	0.9740	0.9735	0.9750	0.9562	0.9551	0.9582
	0.9554	0.9540	0.9557	0.9619	0.9607	0.9616	0.9676	0.9674	0.9679	0.9556	0.9536	0.9555
	0.9550	0.9538	0.9493	0.9568	0.9563	0.9522	0.9647	0.9647	0.9631	0.9587	0.9568	0.9520
5, 8	0.9552	0.9550	0.9511	0.9557	0.9558	0.9559	0.9523	0.9525	0.9543	0.9527	0.9523	0.9517
	0.9534	0.9521	0.9560	0.9549	0.9548	0.9577	0.9665	0.9664	0.9659	0.9537	0.9521	0.9556
	0.9523	0.9510	0.9522	0.9571	0.9556	0.9579	0.9688	0.9694	0.9693	0.9535	0.9522	0.9553
	0.9561	0.9544	0.9514	0.9568	0.9557	0.9542	0.9644	0.9643	0.9643	0.9589	0.9579	0.9560
5,10	0.9512	0.9497	0.9478	0.9547	0.9547	0.9535	0.9579	0.9587	0.9572	0.9524	0.9523	0.9491
	0.9519	0.9495	0.9531	0.9559	0.9549	0.9579	0.9650	0.9661	0.9663	0.9515	0.9497	0.9543
	0.9559	0.9560	0.9561	0.9551	0.9543	0.9561	0.9653	0.9657	0.9664	0.9539	0.9520	0.9546
	0.9535	0.9508	0.9492	0.9589	0.9582	0.9586	0.9659	0.9659	0.9674	0.9547	0.9528	0.9528
8,5	0.9554	0.9538	0.9502	0.9629	0.9620	0.9561	0.9623	0.9620	0.9607	0.9543	0.9532	0.9465
	0.9527	0.9512	0.9563	0.9592	0.9596	0.9615	0.9672	0.9672	0.9678	0.9577	0.9555	0.9566
	0.9545	0.9541	0.9532	0.9549	0.9544	0.9534	0.9616	0.9623	0.9631	0.9513	0.9501	0.9492
	0.9539	0.9533	0.9498	0.9570	0.9555	0.9521	0.9565	0.9564	0.9557	0.9515	0.9514	0.9481
10,5	0.9593	0.9587	0.9532	0.9574	0.9569	0.9537	0.9575	0.9576	0.9573	0.9579	0.9556	0.9515
	0.9522	0.9502	0.9546	0.9565	0.9554	0.9582	0.9647	0.9656	0.9669	0.9559	0.9534	0.9565
	0.9553	0.9534	0.9536	0.9521	0.9514	0.9498	0.9626	0.9636	0.9627	0.9561	0.9547	0.9528
	0.9507	0.9504	0.9493	0.9523	0.9517	0.9490	0.9570	0.9580	0.9559	0.9561	0.9551	0.9563
10,8	0.9550	0.9547	0.9529	0.9561	0.9550	0.9508	0.9544	0.9548	0.9543	0.9528	0.9518	0.9504
	0.9500	0.9501	0.9519	0.9562	0.9564	0.9566	0.9615	0.9617	0.9628	0.9516	0.9520	0.9520
	0.9509	0.9496	0.9493	0.9525	0.9525	0.9528	0.9575	0.9584	0.9585	0.9524	0.9526	0.9524
	0.9510	0.9512	0.9502	0.9549	0.9546	0.9521	0.9561	0.9568	0.9542	0.9526	0.9519	0.9491
10,10	0.9522	0.9516	0.9480	0.9536	0.9536	0.9504	0.9545	0.9553	0.9543	0.9529	0.9529	0.9534
	0.9539	0.9532	0.9530	0.9551	0.9549	0.9563	0.9618	0.9628	0.9626	0.9541	0.9543	0.9555
	0.9525	0.9523	0.9516	0.9514	0.9509	0.9527	0.9589	0.9605	0.9604	0.9527	0.9524	0.9541
	0.9495	0.9491	0.9468	0.9524	0.9528	0.9516	0.9572	0.9581	0.9560	0.9500	0.9494	0.9449

n_1, n_2	$\gamma = 0.02$			$\gamma = 0.10$			$\gamma = 0.70$			$\gamma = 0.95$		
	GCI	MNA	SMNA	GCI	MNA	SMNA	GCI	MNA	SMNA	GCI	MNA	SMNA
10,15	0.9531	0.9528	0.9507	0.9490	0.9484	0.9500	0.9513	0.9513	0.9513	0.9535	0.9535	0.9515
	0.9511	0.9515	0.9533	0.9520	0.9522	0.9532	0.9539	0.9545	0.9551	0.9519	0.9519	0.9519
	0.9492	0.9486	0.9497	0.9575	0.9569	0.9568	0.9580	0.9587	0.9599	0.9522	0.9521	0.9529
	0.9529	0.9531	0.9510	0.9547	0.9546	0.9517	0.9555	0.9564	0.9566	0.9510	0.9497	0.9455
10,20	0.9532	0.9532	0.9498	0.9495	0.9482	0.9486	0.9520	0.9514	0.9513	0.9474	0.9478	0.9443
	0.9538	0.9531	0.9562	0.9556	0.9555	0.9551	0.9551	0.9565	0.9550	0.9489	0.9484	0.9480
	0.9548	0.9543	0.9562	0.9543	0.9544	0.9553	0.9544	0.9559	0.9555	0.9537	0.9531	0.9539
	0.9518	0.9510	0.9501	0.9511	0.9520	0.9516	0.9564	0.9570	0.9577	0.9577	0.9573	0.9557
15,10	0.9519	0.9518	0.9481	0.9552	0.9557	0.9528	0.9493	0.9499	0.9482	0.9536	0.9532	0.9527
	0.9524	0.9518	0.9520	0.9550	0.9548	0.9566	0.9588	0.9590	0.9591	0.9520	0.9515	0.9536
	0.9524	0.9532	0.9527	0.9526	0.9531	0.9524	0.9546	0.9556	0.9559	0.9507	0.9512	0.9523
	0.9484	0.9488	0.9454	0.9566	0.9564	0.9538	0.9505	0.9508	0.9504	0.9522	0.9517	0.9519
20,10	0.9502	0.9491	0.9463	0.9537	0.9546	0.9521	0.9549	0.9555	0.9545	0.9530	0.9530	0.9534
	0.9562	0.9554	0.9566	0.9518	0.9512	0.9526	0.9593	0.9606	0.9599	0.9517	0.9508	0.9524
	0.9500	0.9503	0.9504	0.9537	0.9534	0.9519	0.9577	0.9584	0.9578	0.9525	0.9512	0.9516
	0.9506	0.9509	0.9518	0.9519	0.9515	0.9518	0.9547	0.9556	0.9546	0.9508	0.9514	0.9506
20,20	0.9503	0.9501	0.9486	0.9455	0.9461	0.9450	0.9538	0.9540	0.9512	0.9504	0.9517	0.9466
	0.9534	0.9534	0.9550	0.9521	0.9520	0.9527	0.9556	0.9568	0.9567	0.9542	0.9535	0.9537
	0.9532	0.9528	0.9547	0.9512	0.9517	0.9517	0.9547	0.9550	0.9548	0.9514	0.9520	0.9526
	0.9492	0.9491	0.9492	0.9564	0.9574	0.9551	0.9555	0.9555	0.9558	0.9498	0.9499	0.9510
20,30	0.9517	0.9522	0.9511	0.9502	0.9502	0.9505	0.9479	0.9485	0.9486	0.9497	0.9503	0.9484
	0.9486	0.9488	0.9491	0.9519	0.9513	0.9523	0.9539	0.9549	0.9547	0.9528	0.9522	0.9526
	0.9515	0.9516	0.9515	0.9497	0.9506	0.9514	0.9525	0.9541	0.9543	0.9536	0.9532	0.9538
	0.9492	0.9489	0.9493	0.9524	0.9528	0.9529	0.9555	0.9559	0.9555	0.9500	0.9499	0.9487
20,50	0.9477	0.9475	0.9475	0.9498	0.9496	0.9494	0.9524	0.9527	0.9524	0.9482	0.9489	0.9513
	0.9517	0.9518	0.9516	0.9549	0.9549	0.9551	0.9529	0.9536	0.9535	0.9521	0.9520	0.9537
	0.9513	0.9508	0.9516	0.9493	0.9500	0.9498	0.9564	0.9576	0.9570	0.9519	0.9513	0.9509
	0.9544	0.9531	0.9529	0.9472	0.9474	0.9473	0.9518	0.9531	0.9530	0.9517	0.9508	0.9507
30,50	0.9513	0.9523	0.9504	0.9495	0.9491	0.9497	0.9526	0.9527	0.9530	0.9464	0.9464	0.9466
	0.9488	0.9493	0.9499	0.9534	0.9537	0.9517	0.9507	0.9520	0.9524	0.9494	0.9495	0.9502
	0.9478	0.9479	0.9481	0.9526	0.9528	0.9527	0.9519	0.9518	0.9514	0.9503	0.9505	0.9504
	0.9497	0.9494	0.9502	0.9515	0.9525	0.9526	0.9531	0.9538	0.9535	0.9447	0.9453	0.9452
50,50	0.9518	0.9521	0.9524	0.9488	0.9494	0.9480	0.9510	0.9507	0.9502	0.9508	0.9505	0.9505
	0.9506	0.9508	0.9514	0.9512	0.9512	0.9517	0.9511	0.9518	0.9512	0.9481	0.9489	0.9487
	0.9506	0.9505	0.9513	0.9507	0.9512	0.9520	0.9464	0.9465	0.9464	0.9491	0.9493	0.9493
	0.9499	0.9493	0.9477	0.9544	0.9547	0.9553	0.9504	0.9503	0.9497	0.9498	0.9502	0.9507

جدول ۲. برآورد احتمال پوشش فاصلهٔ اطمینان‌های ارائه شده برای $\sigma_1^2 = 1$ و مقادیر σ_2^2 به‌ترتیب برابر ۰/۰۱، ۱، ۲ و ۵.

n_1, n_2	$\gamma = 0.02$			$\gamma = 0.10$			$\gamma = 0.70$			$\gamma = 0.95$		
	GCI	MNA	SMNA	GCI	MNA	SMNA	GCI	MNA	SMNA	GCI	MNA	SMNA
5, 5	5.423	5.392	4.554	3.858	3.842	3.375	2.755	2.751	2.643	4.563	4.540	3.893
	7.763	7.637	6.288	5.489	5.432	4.669	3.803	3.797	3.615	6.520	6.428	5.382
	9.387	9.249	7.642	6.708	6.643	5.726	4.675	4.666	4.449	7.945	7.843	6.588
	12.969	12.840	10.732	9.171	9.108	7.928	6.507	6.496	6.219	10.874	10.779	9.153
5, 8	5.145	5.128	4.403	3.691	3.683	3.278	2.658	2.661	2.568	4.317	4.305	3.749
	6.312	6.225	5.305	4.523	4.484	3.964	3.204	3.208	3.086	5.341	5.279	4.564
	7.225	7.126	6.103	5.206	5.162	4.583	3.704	3.709	3.572	6.122	6.052	5.258
	9.307	9.218	8.027	6.675	6.641	5.974	4.824	4.830	4.672	7.874	7.815	6.895
5,10	5.057	5.044	4.343	3.627	3.619	3.229	2.629	2.631	2.542	4.288	4.279	3.736
	5.988	5.915	5.075	4.292	4.258	3.787	3.058	3.062	2.952	5.024	4.970	4.326
	6.684	6.596	5.692	4.814	4.775	4.265	3.449	3.455	3.334	5.650	5.587	4.887
	8.321	8.238	7.226	6.037	6.005	5.435	4.361	4.373	4.238	7.040	6.983	6.205
8,5	3.705	3.685	3.258	2.697	2.690	2.451	1.970	1.971	1.915	3.156	3.143	2.813
	6.319	6.233	5.311	4.537	4.498	3.977	3.208	3.212	3.089	5.312	5.252	4.540
	8.085	7.995	6.813	5.793	5.749	5.085	4.152	4.157	4.000	6.830	6.765	5.850
	11.825	11.754	10.059	8.503	8.465	7.514	6.069	6.074	5.855	9.981	9.928	8.619
10,5	3.263	3.246	2.897	2.377	2.372	2.177	1.747	1.750	1.704	2.778	2.767	2.498
	5.977	5.902	5.064	4.283	4.247	3.777	3.068	3.072	2.962	5.036	4.982	4.337
	7.794	7.721	6.621	5.608	5.573	4.954	3.998	4.004	3.861	6.584	6.531	5.681
	11.606	11.549	9.925	8.304	8.273	7.370	5.995	6.002	5.794	9.826	9.785	8.529
10,8	2.916	2.911	2.690	2.144	2.143	2.021	1.615	1.618	1.589	2.490	2.486	2.317
	4.361	4.322	3.910	3.184	3.169	2.938	2.355	2.363	2.308	3.724	3.696	3.377
	5.416	5.375	4.870	3.983	3.967	3.683	2.947	2.955	2.887	4.632	4.603	4.213
	7.729	7.698	7.016	5.702	5.690	5.309	4.237	4.246	4.156	6.610	6.588	6.061
10,10	2.825	2.821	2.625	2.096	2.095	1.985	1.592	1.595	1.569	2.432	2.429	2.278
	3.935	3.904	3.578	2.910	2.898	2.715	2.161	2.168	2.125	3.379	3.358	3.105
	4.809	4.776	4.387	3.546	3.535	3.317	2.641	2.649	2.598	4.119	4.098	3.797
	6.677	6.654	6.156	4.944	4.936	4.658	3.728	3.738	3.672	5.722	5.707	5.323
10,15	2.762	2.759	2.583	2.049	2.049	1.951	1.548	1.550	1.527	2.368	2.366	2.231
	3.475	3.452	3.209	2.571	2.562	2.426	1.929	1.936	1.903	2.970	2.954	2.767
	4.075	4.049	3.773	3.009	3.000	2.847	2.269	2.277	2.241	3.483	3.466	3.254
	5.395	5.376	5.053	4.018	4.014	3.833	3.043	3.053	3.010	4.630	4.620	4.371
10,20	2.725	2.723	2.554	2.029	2.029	1.935	1.529	1.531	1.509	2.334	2.334	2.204
	3.244	3.224	3.013	2.412	2.403	2.285	1.812	1.817	1.789	2.788	2.774	2.611
	3.712	3.689	3.456	2.755	2.746	2.616	2.087	2.094	2.063	3.183	3.168	2.988
	4.760	4.743	4.483	3.551	3.547	3.402	2.702	2.711	2.676	4.093	4.082	3.882
15,10	2.223	2.220	2.102	1.670	1.670	1.604	1.270	1.273	1.258	1.917	1.917	1.826
	3.469	3.446	3.203	2.571	2.562	2.426	1.930	1.936	1.904	2.967	2.951	2.764
	4.401	4.379	4.074	3.251	3.242	3.072	2.450	2.457	2.417	3.783	3.767	3.532
	6.383	6.367	5.946	4.733	4.727	4.493	3.582	3.589	3.534	5.466	5.455	5.131
20,10	1.929	1.927	1.837	1.441	1.442	1.392	1.105	1.108	1.096	1.663	1.662	1.592
	3.259	3.238	3.026	2.413	2.406	2.288	1.820	1.826	1.798	2.785	2.771	2.609
	4.224	4.206	3.932	3.127	3.120	2.967	2.364	2.369	2.333	3.611	3.598	3.387
	6.278	6.267	5.870	4.649	4.646	4.426	3.525	3.531	3.480	5.354	5.347	5.044
20,20	1.786	1.785	1.727	1.347	1.348	1.315	1.040	1.041	1.034	1.540	1.540	1.495
	2.446	2.437	2.338	1.837	1.834	1.779	1.414	1.418	1.405	2.116	2.109	2.033
	2.990	2.981	2.864	2.248	2.245	2.179	1.730	1.734	1.719	2.581	2.575	2.485
	4.189	4.184	4.036	3.161	3.161	3.078	2.435	2.440	2.420	3.622	3.619	3.505
20,30	1.751	1.751	1.698	1.321	1.322	1.292	1.021	1.022	1.015	1.515	1.515	1.475
	2.200	2.193	2.118	1.658	1.656	1.614	1.275	1.278	1.268	1.899	1.894	1.837
	2.591	2.584	2.499	1.944	1.942	1.895	1.501	1.505	1.494	2.238	2.234	2.168
	3.485	3.481	3.381	2.631	2.630	2.575	2.043	2.048	2.035	3.006	3.004	2.928
20,50	1.720	1.720	1.671	1.304	1.304	1.277	1.009	1.010	1.003	1.494	1.494	1.455
	1.997	1.992	1.932	1.506	1.504	1.470	1.164	1.166	1.158	1.731	1.727	1.681
	2.251	2.245	2.180	1.697	1.695	1.659	1.316	1.319	1.310	1.946	1.942	1.892
	2.865	2.861	2.789	2.162	2.162	2.123	1.682	1.686	1.677	2.475	2.474	2.419
30,50	1.379	1.379	1.352	1.047	1.047	1.032	0.816	0.816	0.813	1.192	1.193	1.172
	1.698	1.694	1.657	1.283	1.282	1.262	0.999	1.001	0.996	1.472	1.470	1.442
	1.984	1.980	1.939	1.501	1.500	1.477	1.171	1.173	1.168	1.718	1.716	1.684
	2.651	2.649	2.601	2.013	2.013	1.987	1.571	1.574	1.568	2.299	2.298	2.261

n_1, n_2	$\gamma = 0.02$			$\gamma = 0.10$			$\gamma = 0.70$			$\gamma = 0.95$		
	GCI	MNA	SMNA	GCI	MNA	SMNA	GCI	MNA	SMNA	GCI	MNA	SMNA
50,50	1.064	1.065	1.051	0.810	0.810	0.803	0.634	0.634	0.632	0.923	0.923	0.913
	1.444	1.442	1.419	1.098	1.098	1.085	0.857	0.858	0.855	1.252	1.251	1.233
	1.765	1.763	1.736	1.343	1.343	1.328	1.049	1.050	1.047	1.529	1.528	1.507
	2.487	2.486	2.452	1.892	1.893	1.874	1.485	1.486	1.482	2.160	2.160	2.134



شکل ۲. حدود (A) و طول (B) فاصلهٔ اطمینان‌های حاصل از ۳ روش بر روی داده‌های موتور موشک

۲.۵ داده‌های موتورموشک

در این مثال به داده‌های گزارش شده در [۱۶] مربوط به آزمایش موتور موشک پرداخته می‌شود. در [۱۶] نرمال بودن توزیع مشاهدات نشان داده شده است. نتایج حاصل از نمونه ۱۷ تایی و نمونه ۲۴ تایی به‌ترتیب دارای میانگین (واریانس) ۱۶٫۴۸۵(۰٫۳۴۰۹) و ۷٫۷۸۹(۰٫۰۵۴۱۴) هستند. فاصلهٔ اطمینان مربوط به اختلاف چندک‌های حاصل از این دو نمونه در شکل ۲ آمده است.

با توجه به این‌که هر ۳ فاصلهٔ اطمینان شامل مقدار صفر نیستند پس می‌توان گفت توزیع این دو جامعه به‌طور معنی‌داری متفاوت است. همچنین همانند نتایج مثال اول، عملکرد روش SMNA قابل توجه است و کوتاه‌ترین فاصلهٔ اطمینان را نتیجه می‌دهد.

۶ نتایج

در این مقاله فاصلهٔ اطمینان برای چندک‌های توزیع نرمال در یک و دو جامعه به دست آورده شد. در حالت یک جامعه‌ای با یک کمّیت محوری جدید که دارای توزیع t نامرکزی است، معرفی شد و با استفاده از آن کوتاه‌ترین فاصلهٔ اطمینان به دست آورده شد. برای اختلاف چندک‌های دو جامعه نرمال، کمّیت محوری تعمیم‌یافته‌ای ارائه شد و بر اساس روش تقریب پایه-نرمال اصلاح‌شده راهکاری ساده و شکل صریحی برای به دست آوردن مقادیر صدک این کمّیت محوری ارائه شد. همچنین بر اساس این تقریب، روشی برای به دست آوردن فاصلهٔ اطمینان با طول کوتاه‌تر نیز شرح داده شد. در دو مثال واقعی ارائه‌شده نیز عملکرد مناسب کوتاه‌ترین فاصلهٔ اطمینان مورد بررسی قرار گرفت.

مراجع

[1] Abdollahnezhad, K. and Jafari, A. A. (2017). Testing the equality of quantiles for several normal populations. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **47(7)**, 1890-1898.

[2] Albers, W. and Löhnberg, P. (1984). An approximate confidence interval for the difference between quantiles in a bio-medical problem, *Statistica Neerlandica*, **38**(**1**), 20-22.

[3] Bristol, D. R. (1990). Distribution free confidence intervals for the difference between quantiles, *Statistica Neerlandica*, **44**(**2**), 87-90.

[4] Campbell, M. and Rudolfer, S. (1981). Large sample inference for diagnostic normal limits in Gaussian populations, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **14**(**8**), 1801-1835.

[5] Chakraborti, S. and Li, J. (2007). Confidence interval estimation of a normal percentile, *The American Statistician*, **61**(**4**), 331-336.

[6] Cox, T. F. and Jaber, K. (1985). Testing the equality of two normal percentiles, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **14**(**2**), 345-356.

[7] Hall, I. J. (1984). Approximate one-sided tolerance limits for the difference or sum of two independent normal variates, *Journal of Quality Technology - Statistics and Engineering* , **16**(**1**), 15-19.

[8] Huang, L.F. and Johnson, R. A. (2006). Confidence regions for the ratio of percentiles, *Statistics and Probability Letters*, **76**(**4**), 384-392.

[9] Guo, H. and Krishnamoorthy, K. (2005). Comparison between two quantiles: The normal and exponential cases, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **34**(**2**), 273-252.

[10] Johnson, R. A. and Huang, L. F. (2003). Some exact and approximate confidence regions for the ratio of percentiles from two different distributions, *In Mathematical and statistical methods in reliability, eds. B. Lindqvist and K. Doksum, Singapore: World Scientific*, 455–468.

[11] Krishnamoorthy, K. (2016). Modified normal-based approximation to the percentiles of linear combination of independent random variables with applications, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **45**(**7**), 2428–2444.

[12] Marshall, A. W. and Walsh, J. E. (1950). Some test for comparing percentage points of two arbitrary continuous populations, *In Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, **I**, 1-13.

[13] Rudolfer, S. M. and Campbell, M. G. (1985). Large sample inference for diagnostic normal limits in Gaussian populations, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **14**(**8**), 1801–1835.

[14] Zou, G. Y., Huo, C. Y. and Taleban, J. (2009). Confidence interval estimation for log-normal data with application to health economics, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**(**11**), 3755–376.

[15] Walsh, J. (1954). Bounded significance level tests for comparing quantiles of two possibly different continuous populations, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **6**(**3**), 213–222.

[16] Weerahandi, S. and Johnson, R. A. (1992). Testing reliability in a stress-strength model when X and Y are normally distributed, *Technometrics*, **34**(**1**), 83–91.

[17] Weerahandi, S. (1995). *Exact Statistical Methods for Data Analysis*, New York: Springer-Verlag.