برآورد E-بیزی پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی [۱]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۷/۲۳
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۱۲/۲۵

چکیده:

در این مقاله برآورد E-بیزی پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری تحت تابع زیان درجهٔ دوم به دست می‌آید. سپس با استفاده از شبیه‌سازی مونته‌کارلو برآورد E-بیزی پارامترها با برآوردهای بیزی مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: توزیع نمایی دوپارامتری، برآورد E-بیزی، شبیه‌سازی مونته‌کارلو.

۱ مقدمه

توزیع نمایی دوپارامتری دارای کاربردهای متعددی در زمینه‌های شیمی، داروسازی و کشاورزی است. همچنین در قابلیت اعتماد، پارامتر مکان توزیع نمایی دوپارامتری به‌عنوان مدت ضمانت قطعهٔ الکتریکی و پارامتر مقیاس به‌عنوان متوسط طول عمر استفاده می‌شود. در مطالعات زیست‌شناسی، پارامتر مکان، دورهٔ پنهان بیماری و پارامتر مقیاس، مدت زمان بیماری علاوه بر مدت زمان پنهان بیماری نامیده می‌شود. بنا بر این برآورد پارامترهای آن اهمیت بسزایی دارد. محققان بسیاری به برآورد پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری به روش‌های مختلف پرداخته‌اند که می‌توان به برخی از آن‌ها مانند [۱، ۳، ۴، ۵، ۱۰، ۱۲] اشاره کرد. در این مقاله در ابتدا روش برآورد E-بیزی تعریف شده، سپس پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری به‌کمک این روش برآورد می‌شود.

تعریف ۱.۱. اگر $\hat{\theta}_B(b)$ برآورد بیزی θ و $h(b)$ توزیع پیشین b باشد، آن‌گاه برآورد E-بیزی θ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{\theta}_{EB} = \int_{\Lambda} \hat{\theta}_B(b)h(b)db = E_b(\hat{\theta_B}), \quad b \in \Lambda.$$

با توجه به تعریف ۱.۱ واضح است که برآورد E-بیزی در واقع امید ریاضی برآورد بیزی پارامتر θ، یعنی $\hat{\theta}_B(b)$ است. از دیرباز روش‌های مختلفی برای برآورد پارامترهای توزیع‌های آماری ارائه شده است. از روش‌های برآورد، روش بیزی مبتنی بر توزیع‌های پیشین است که انتخاب معقول آنها روی فضای پارامتر، نقش مهمی در کاهش خطای برآوردگر پسین بیزی دارد. گاهی وسیع بودن حوزهٔ تغییرات پارامتر روی فضای پارامتر، باعث افزایش خطا و بزرگ شدن معیارهای مقایسه می‌شود. بنا بر این تعریف توزیع پیشین مناسب روی فضای پارامتر، نقش مهمی در کاهش معیارهای مقایسه دارد. از این رو با در نظر گرفتن توزیع پیشین مناسب برای پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری با تابع چگالی احتمال

$$f(x;\alpha,\beta) = \beta e^{-\beta(x-\alpha)}, \quad x > \alpha, \alpha \in R, \beta > 0 \quad (۱)$$

و اعمال شرایطی خاص روی ابر پارامترهای توزیع پیشین، برآورد بیزی مورد انتظار که به اختصار برآورد E-بیزی نامیده می‌شود به دست می‌آید که می‌تواند کارا یا تحت شرایطی کارا باشد. اخیراً از روش برآورد E-بیزی که توسط [۷] معرفی شده برای برآورد پارامتر توزیع نمایی و برآورد پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای ([۷، ۸])، برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع بور نوع ۱۲ بر اساس نمونه‌های سانسور فزآیندهٔ نوع دوم ([۹]) و برآورد پارامتر توزیع پاسکال ([۱۴]) کمک گرفته شده است. در این مقاله به‌کمک تعریف ۱.۱ برآورد E-بیزی پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری با تابع چگالی احتمال ۱ تحت تابع زیان درجهٔ دوم در بخش دوم به دست می‌آید. در بخش سوم به‌کمک شبیه‌سازی مونته‌کارلو، برآورد E-بیزی پارامترهای تابع چگالی احتمال ۱ با برآورد بیزی‌شان مقایسه می‌شود. بخش چهارم هم به نتایج مقاله اختصاص داده شده است.

[۱] گروه آمار دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

۲ برآورد E-بیز

در این بخش در ابتدا برآورد بیزی پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری با تابع چگالی احتمال ۱ تحت تابع زیان درجهٔ دوم

$$L(\hat{\theta},\theta)=(\hat{\theta}-\theta)^2$$

محاسبه و سپس برآورد E-بیزی آن‌ها به دست آورده می‌شود. از آنجا که پیشنهادی برای توزیع توأم α و β وجود ندارد، مشابه کار [۱۱] فرض می‌کنیم α (پارامتر مکان) و β (پارامتر مقیاس) مستقل و دارای توزیع پیشین به‌صورت زیر هستند.

$$\pi_2(\beta|a_2,b_2)=\frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)}\beta^{a_2-1}e^{-b_2\beta},\alpha>0,a_2,b_2>0. \quad (۲)$$

$$\pi_2(\beta|a_2,b_2)=\frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)}\beta^{a_2-1}e^{-b_2\beta},\alpha>0,a_2,b_2>0. \quad (۳)$$

با توجه به [۶]، a_1 و b_1 طوری در نظر گرفته می‌شود تا $\pi_1(\alpha|a_1,b_1)$ نسبت به α کاهشی باشد. با توجه به رابطهٔ

$$\frac{d\pi_1(\alpha|a_1,b_1)}{d\alpha}=\frac{b_1^{a_1}\alpha^{a_1-2}e^{-b_1\alpha}}{\Gamma(a_1)}\left((a_1-1)-b_1\alpha\right)$$

باید $0<a_1\le 1$ و $b_1>0$ باشد. اما شرط $b_1>0$ باعث نمی‌شود که b_1 بتواند هر مقداری را در بازهٔ $(0,\infty)$ بگیرد. [۲] نشان داد که بزرگ شدن b_1 باعث می شود کارایی برآوردگر بیزی α کاهش یابد بنا بر این ابر پارامتر b_1 به‌عنوان یک متغیر تصادفی باید از بالا کران‌دار شود و به‌صورت $0<b_1<c_1$ باشد. [۸] توزیع‌های مختلفی برای b_1 در نظر گرفت و نشان داد که مناسب‌ترین توزیع b_1 توزیع یکنواخت در بازهٔ $(0,c_1)$ است. بنا بر این در این مقاله مشابه کار [۸]، توزیع b_1 یعنی $\pi_3(b_1)$ توزیع یکنواخت پیوسته در بازهٔ $(0,c_1)$ (c_1 ثابت) در نظر گرفته می‌شود. همچنین با توجه به $0<a_1\le 1$ بدون آن‌که به کلیت مسئله خللی وارد شود فرض می‌کنیم $a_1=1$ باشد، که در این صورت رابطهٔ ۲ به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\pi_1(\alpha|b_1)=b_1e^{-\alpha b_1}. \quad (۴)$$

با استدلالی مشابه استدلال فوق در بارهٔ a_2 و b_2، توزیع b_2 یعنی $\pi_4(b_2)$ یکنواخت پیوسته در بازهٔ $(0,c_2)$ با c_2 ثابت در نظر گرفته می‌شود. همچنین با فرض $a_2=1$ رابطهٔ ۳ به‌صورت زیر تبدیل می شود:

$$\pi_2(\beta|b_2)=b_2e^{-\beta b_2}. \quad (۵)$$

بنا بر این توزیع پیشین توأم α و β به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\pi(\alpha,\beta)=b_1b_2e^{-(\alpha b_1+\beta b_2)} \quad (۶)$$

بر اساس نمونهٔ تصادفی $\mathbf{X}=(X_1,...,X_n)$ از توزیع نمایی دوپارامتری با تابع چگالی احتمال ۱ و با توجه به رابطهٔ ۶، توزیع پسین توأم α و β به‌صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}\pi^*(\alpha,\beta|\mathbf{X})=&\frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_2)-\alpha(b_1-n\beta)}}{\int_0^\infty\int_0^\infty \beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_2)-\alpha(b_1-n\beta)}d\alpha d\beta}\\ =&\frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_2)-\alpha(b_1-n\beta)}}{\int_0^\infty \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_2)}\left(1-e^{-x_{(1)}(b_1-n\beta)}\right)}{b_1-n\beta}d\beta},\end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن $0<\alpha<x_{(1)}$، $\beta>0$ و $x_{(1)}=\min(x_1,...,x_n)$ است. بنا بر این با توجه به رابطهٔ ۷ برآوردهای بیزی α و β که به‌ترتیب با نمادهای $\hat{\alpha}_B$ و $\hat{\beta}_B$ نشان داده می‌شوند، تحت تابع زیان درجهٔ دوم برابرند با

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_B(b_1)=&E(\alpha|\mathbf{X})\\ =&\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_2)-\alpha(b_1-n\beta)}d\alpha d\beta}{\int_0^\infty \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_2)}\left(1-e^{-x_{(1)}(b_1-n\beta)}\right)}{b_1-n\beta}d\beta}\\ =&\frac{\int_0^\infty \beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_2)}g(\beta)d\beta}{\int_0^\infty \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_2)}\left(1-e^{-x_{(1)}(b_1-n\beta)}\right)}{b_1-n\beta}d\beta},\end{aligned} \quad (۸)$$

که در آن $g(\beta)$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}g(\beta)=&\Bigg[\frac{1}{(b_1-n\beta)^2}-\frac{e^{-x_{(1)}(b_1-n\beta)}}{(b_1-n\beta)^2}\\ &-\frac{x_{(1)}e^{-x_{(1)}(b_1-n\beta)}}{b_1-n\beta}\Bigg].\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_B(b_2)=&E(\beta|\mathbf{X})\\ =&\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty \beta^{n+1} e^{-\beta(\bar{x}+b_2)-\alpha(b_1-n\beta)}d\alpha d\beta}{\int_0^\infty \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_2)}\left(1-e^{-x_{(1)}(b_1-n\beta)}\right)}{b_1-n\beta}d\beta}\\ =&\frac{\int_0^\infty \beta^{n+1}(b_1-n\beta)^{-1} e^{-\beta(\bar{x}+b_2)}d\beta}{\int_0^\infty \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_2)}\left(1-e^{-x_{(1)}(b_1-n\beta)}\right)}{b_1-n\beta}d\beta}.\end{aligned} \quad (۹)$$

برای محاسبهٔ انتگرال‌های روابط ۸ و ۹ از روش شبیه‌سازی میانگین نمونهٔ مونته‌کارلو استفاده می‌کنیم.

بنا بر این با توجه به روابط ۸ و ۹ و تعریف ۱.۱ برآوردهای

E-بیزی α و β به‌صورت‌های زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{EB} &= \int_0^{c_1} \hat{\alpha}_{Bay}(b_1)\pi_3(b_1)db_1 \\ &= \frac{\int_0^{\infty}\int_0^{c_1} \beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_2)} g(\beta)db_1 d\beta}{c_1 \int_0^{\infty} \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_2)}\left(1-e^{-x_{(1)}(b_1-n\beta)}\right)}{b_1-n\beta}d\beta},\end{aligned} \tag{۱۰}$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{EB} &= \int_0^{c_2} \hat{\beta}_{Bay}(b_2)\pi_4(b_2)db_2 \\ &= \frac{\Gamma(n+1)S(\alpha)e^{-\alpha b_1}}{nc_2 \int_0^{\infty} \frac{\beta^n e^{-\beta(\bar{x}+b_2)}\left(1-e^{-x_{(1)}(b_1-n\beta)}\right)}{b_1-n\beta}d\beta},\end{aligned} \tag{۱۱}$$

که

$$S(\alpha) = (\bar{x}-n\alpha)^{-n} - (\bar{x}+c_2-n\alpha)^{-n}.$$

۳ مطالعهٔ شبیه‌سازی

در این بخش از توزیع نمایی دوپارامتری با تابع چگالی احتمال ۱ نمونه‌های تصادفی با اندازه‌های متفاوت شبیه‌سازی می‌شود و برآوردهای بیزی و E-بیزی پارامترهای α و β محاسبه و با هم مقایسه می‌شوند. مراحل شبیه‌سازی در زیر آمده است:

گام اول: به‌ازای b_1 مشخص، از توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال ۴، پارامتر α را تولید می‌کنیم.

گام دوم: به‌ازای b_2 مشخص، از توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال ۵، پارامتر β را تولید می‌کنیم.

گام سوم: از توزیع یکنواخت استاندارد، نمونه‌های تصادفی با اندازه‌های ۵، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ تولید می‌کنیم.

گام چهارم: به‌کمک α و β تولید شده به‌ترتیب در گام‌های اول و دوم و با استفاده از رابطهٔ $X = \alpha - \frac{1}{\beta}\log(1-U)$ نمونه‌های تصادفی با اندازه‌های ۵، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ از توزیع با تابع چگالی احتمال ۱ که U متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت استاندارد می‌باشد، تولید می‌کنیم.

گام پنجم: با استفاده از نمونه‌های تولید شده در گام دوم و به‌کمک روابط (۸)، (۹)، (۱۰) و (۱۱) و به‌ازای b_1، b_2، c_1 و c_2 مشخص، برآوردهای بیزی و E-بیزی پارامترهای α و β را به دست می‌آوریم.

گام ششم: گام‌های اول تا پنجم را ۱۰۰۰ بار تکرار می‌کنیم و میانگین برآورد پارامترهای α و β و جذر میانگین توان‌های دوم خطای آن‌ها را به دست می‌آوریم، که نتایج شبیه‌سازی در جدول‌های ۱ تا ۴ آمده است. در این مقایسه برآوردگری بهتر است که جذر میانگین توان‌های دوم خطای آن کمتر باشد. بنا بر این نتایج جدول‌های ۱ تا ۴ نشان‌دهندهٔ آن است که برای توزیع نمایی دوپارامتری با تابع چگالی احتمال ۱ در حالت $\frac{b_1}{b_2} = 1$ (جدول‌های ۲ و ۴) برآورد E-بیزی پارامتر مکان (α) بهتر از برآورد بیزی آن است. اما در حالت‌های $\frac{b_1}{b_2} > 1$ (جدول۱) و $\frac{b_1}{b_2} < 1$ (جدول۳) برآورد بیزی α بهتر از برآورد E-بیزی آن است ولی برآورد E-بیزی پارامتر مقیاس (β) همواره بهتر از برآورد بیزی آن است. همچنین با افزایش اندازهٔ نمونه، جذر میانگین توان‌های دوم خطای همهٔ برآوردگرها کاهش می‌یابد.

۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله برآوردهای E-بیزی پارامترهای مکان و مقیاس توزیع نمایی دوپارامتری به دست آمد و با مقایسهٔ آن‌ها با برآوردهای بیزی پارامترها با استفاده از شبیه‌سازی مونته‌کارلو نشان داده شد که برآورد E-بیزی پارامتر مکان، تحت شرایطی بهتر از برآورد بیزی است ولی برآورد E-بیزی پارامتر مقیاس، همواره بهتر از برآورد بیزی آن است.

سپاسگزاری

نویسنده بر خود لازم می داند که از داوران و سردبیر مجله بابت راهنمایی‌های‌شان برای بهتر شدن این مقاله تشکر کند.

جدول۱. میانگین برآورد پارامترهای تابع چگالی احتمال ۱ و جذر میانگین توان‌های دوم خطای آن‌ها به‌ازای $b_1 = ۲$، $b_2 = ۳$، $c_1 = ۲/۵$ و $c_2 = ۳$.

n	$\hat{\alpha}_B$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_B)}$	$\hat{\beta}_B$	$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_B)}$	$\hat{\alpha}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_{EB})}$	$\hat{\beta}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_{EB})}$
۵	۱/۶۶۸	۱/۳۱۳	$۲/۰۸ \times ۱۰^{-۷}$	$۸/۱۱ \times ۱۰^{-۴}$	۶۰۰/۷	۲۵/۶۸	$۹/۰۲ \times ۱۰^{-۸}$	$۵/۳۴ \times ۱۰^{-۴}$
۱۰	۱/۶۱۸	۱/۴۳۸	$۷/۶۶ \times ۱۰^{-۲۲}$	$۴/۳۹ \times ۱۰^{-۱۲}$	۵۰۰/۸	۲۰/۶۹	$۴/۱۸ \times ۱۰^{-۲۲}$	$۳/۲۴ \times ۱۰^{-۱۱}$
۲۰	۱/۰۵۸	۱/۱۱۵	$۲/۲۱ \times ۱۰^{-۴۶}$	$۲/۳۷ \times ۱۰^{-۲۳}$	۳۰۰/۶	۲۰/۰۴	$۱/۳۰ \times ۱۰^{-۴۶}$	$۱/۸۲ \times ۱۰^{-۲۳}$
۳۰	۰/۵۴۸۸	۰/۷۶۳۱	$۸/۷۹ \times ۱۰^{-۱۱۲}$	$۵/۲۷ \times ۱۰^{-۵۶}$	۸۸/۰۳	۱۰/۰۵	$۵/۳۸ \times ۱۰^{-۱۱۲}$	$۴/۱۲ \times ۱۰^{-۵۶}$
۴۰	۰/۲۵۳۸	۰/۶۲۴۷	$۲/۳۹ \times ۱۰^{-۱۳۲}$	$۲/۷۵ \times ۱۰^{-۶۶}$	۲/۴۵۱	۱/۸۶۱	$۱/۱۹ \times ۱۰^{-۱۳۲}$	$۱/۹۴ \times ۱۰^{-۶۶}$
۵۰	۰/۴۵۴۱	۰/۵۵۳۶	$۶/۹۰ \times ۱۰^{-۹۰}$	$۴/۶۹ \times ۱۰^{-۹۵}$	۱/۵۱۴	۰/۸۵۴۴	$۳/۹۳ \times ۱۰^{-۹۰}$	$۳/۵۲ \times ۱۰^{-۹۵}$

جدول۲. میانگین برآورد پارامترهای تابع چگالی احتمال ۱ و جذر میانگین توان‌های دوم خطای آن‌ها به‌ازای $b_1 = b_2 = ۱/۵$، $c_1 = c_2 = ۲$.

n	$\hat{\alpha}_B$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_B)}$	$\hat{\beta}_B$	$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_B)}$	$\hat{\alpha}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_{EB})}$	$\hat{\beta}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_{EB})}$
۵	۱/۹۳۱	۱/۵۱۹	$۴/۷۷ \times ۱۰^{-۱۲}$	$۳/۱۹ \times ۱۰^{-۶}$	۰/۴۶۸۲	۰/۸۴۶۷	$۳/۸۰ \times ۱۰^{-۶}$	$۲/۸۴ \times ۱۰^{-۶}$
۱۰	۱/۶۴۷	۱/۴۸۱	$۱/۹۱ \times ۱۰^{-۲۸}$	$۲/۴۵ \times ۱۰^{-۱۴}$	۰/۳۸۰۴	۰/۷۵۴۳	$۱/۵۸ \times ۱۰^{-۲۸}$	$[۲/۲۴۱۰^{-۱۴}$
۲۰	۰/۷۶۹۲	۰/۸۸۸۹	$۴/۵۴ \times ۱۰^{-۴۹}$	$۱/۱۹ \times ۱۰^{-۲۴}$	۰/۲۰۹۵	۰/۴۹۳۳	$۳/۸۵ \times ۱۰^{-۴۹}$	$۱/۱۰ \times ۱۰^{-۲۴}$
۳۰	۰/۳۹۳۸	۰/۶۰۷۵	$۲/۵۶ \times ۱۰^{-۱۱۲}$	$۲/۸۵ \times ۱۰^{-۵۶}$	۰/۰۶۴۸	۰/۲۷۲۴	$۲/۱۹ \times ۱۰^{-۱۱۲}$	$۲/۶۳ \times ۱۰^{-۵۶}$
۴۰	۰/۳۳۴۴	۰/۵۱۳۱	$۳/۵۶ \times ۱۰^{-۱۵۳}$	$۱/۰۶ \times ۱۰^{-۶۰}$	۰/۰۵۴۵	۰/۲۲۶۰	$۳/۰۵ \times ۱۰^{-۱۵۳}$	$۹/۸۲ \times ۱۰^{-۶۱}$
۵۰	۰/۳۳۱۹	۰/۵۰۷۲	$۳/۵۳ \times ۱۰^{-۲۲۹}$	$۱/۰۵ \times ۱۰^{-۶۴}$	/۰۷۰۶	۰/۲۱۰۶	$۳/۰۲ \times ۱۰^{-۱۲۹}$	$۹/۷۲ \times ۱۰^{-۶۵}$

جدول۳. میانگین برآورد پارامترهای تابع چگالی احتمال ۱ و جذر میانگین توان‌های دوم خطای آن‌ها به‌ازای $b_1 = ۳$، $b_2 = ۲$، $c_1 = ۲$ و $c_2 = ۲$.

n	$\hat{\alpha}_B$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_B)}$	$\hat{\beta}_B$	$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_B)}$	$\hat{\alpha}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_{EB})}$	$\hat{\beta}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_{EB})}$
۵	۱/۱۳۸	۱/۱۹۱	$۲/۴۹ \times ۱۰^{-۹}$	$۸/۳۹ \times ۱۰^{-۵}$	۳/۰۹۹	۲/۳۵۹	$۱/۴۰ \times ۱۰^{-۹}$	$۶/۲۰ \times ۱۰^{-۵}$
۱۰	۰/۶۷۲۳	۰/۷۵۶۵	$۱/۵۶ \times ۱۰^{-۲۰}$	$۲/۲۲ \times ۱۰^{-۱۰}$	۱/۵۸۳	۱/۸۸۸	$۱/۰۳ \times ۱۰^{-۲۰}$	$۱/۸۱ \times ۱۰^{-۱۰}$
۲۰	۰/۳۸۸۳	۰/۶۶۷۱	$۳/۶۲ \times ۱۰^{-۵۴}$	$۳/۳۸ \times ۱۰^{-۲۷}$	۰/۲۳۰۲	۰/۹۱۰۴	$۲/۵۳ \times ۱۰^{۵۳}$	$۲/۸۳ \times ۱۰^{-۲۷}$
۳۰	۰/۵۸۰۰	۰/۵۴۲۷	$۱/۸۷ \times ۱۰^{-۹۹}$	$۷/۶۵ \times ۱۰^{-۵۰}]$	۰/۵۷۱۸	۰/۶۹۵۲	$۱/۳۳ \times ۱۰^{-۹۹}$	$۶/۴۴ \times ۱۰^{-۵۰}]$
۴۰	۱/۰۲۵	۰/۴۳۱۱	$۷/۰۱ \times ۱۰^{-۱۱۸}$	$۴/۷۱۱۰^{-۵۹}$	۱/۷۵۹	۰/۵۸۰۹	$۵/۰۱ \times ۱۰^{-۱۱۸}$	$۳/۹۷ \times ۱۰^{-۵۹}]$
۵۰	۰/۹۲۶۴	۰/۳۸۸۸	$۱/۶۱ \times ۱۰^{-۱۳۱}$	$۷/۱۴ \times ۱۰^{-۶۶}$	۲/۳۱۹	۰/۴۰۴۲	$۱/۱۵۷ \times ۱۰^{-۱۳۱}$	$۶/۰۵ \times ۱۰^{-۶۶}$

جدول۴. میانگین برآورد پارامترهای تابع چگالی احتمال ۱ و جذر میانگین توان‌های دوم خطای آن‌ها به‌ازای $b_1 = b_2 = ۳$ و $c_1 = c_2 = ۴$.

n	$\hat{\alpha}_B$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_B)}$	$\hat{\beta}_B$	$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_B)}$	$\hat{\alpha}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\alpha}_{EB})}$	$\hat{\beta}_{EB}$	$\sqrt{MSE(\hat{\beta}_{EB})}$
۵	۰/۹۲۹۷	۰/۹۵۹۳	$۱/۸۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۷/۶۵ \times ۱۰^{-۵}$	۰/۳۳۹۴	۰/۴۶۲۹	$۱/۲۹ \times ۱۰^{-۹}$	$۶/۳۹ \times ۱۰^{-۵}$
۱۰	۰/۳۸۵۵	۰/۸۱۸۴	$۳/۷۵ \times ۱۰^{-۳۸}$	$۲/۸۴ \times ۱۰^{-۱۹}$	۰/۱۱۱۸	۰/۳۱۱۳	$۲/۷۳ \times ۱۰^{-۳۸}$	$۲/۸۴ \times ۱۰^{-۱۹}$
۲۰	۰/۵۲۷۶	۰/۷۲۵۵	$۳/۶۰ \times ۱۰^{-۶۹}$	$۱/۰۶ \times ۱۰^{-۳۴}$	۰/۰۲۲۶	۰/۱۷۶۱	$۲/۷۱ \times ۱۰^{-۶۹}$	$۹/۲۴ \times ۱۰^{-۳۵}$
۳۰	۰/۵۵۳۱	۰/۶۸۲۹	$۲/۹۴ \times ۱۰^{-۹۰}$	$۲/۹۳ \times ۱۰^{-۴۵}$	۰/۰۱۲۸	۰/۱۲۱۸	$۲/۲۳ \times ۱۰^{-۹۰}$	$۲/۵۵ \times ۱۰^{-۴۵}$
۴۰	۰/۴۳۱۰	۰/۶۴۶۳	$۸/۱۹ \times ۱۰^{-۱۰۸}$	$۵/۰۸ \times ۱۰^{-۵۴}]$	۰/۰۰۹۸	۰/۱۰۱۹	$۶/۲۲ \times ۱۰^{-۱۰۸}$	$۴/۴۳ \times ۱۰^{-۵۴}$
۵۰	۰/۴۰۸۷	۰/۵۶۹۴	$۳/۵۶ \times ۱۰^{-۱۴۲}$	$۳/۳۵ \times ۱۰^{-۷۱}$	۰/۰۰۷۸	۰/۰۹۵۶	$۲/۷۱ \times ۱۰^{-۱۴۲}$	$۲/۹۳ \times ۱۰^{-۷۱}$

مراجع

[1] Beg, M. A. (1980). On the estimation of $P(Y < X)$ for the two-parameter exponential distribution. *Metrika*, **27**, 29-34.

[2] Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. second ed. Springer, New York.

[3] Cramer, E. and Tamm, M. (2014). On a Correction of the scale MLE for a two-prameter exponential distribution under progressive type-I censoring. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **43**, 4401-4414.

[4] Epstein, B. (1960). Estimation of the parameters of two parameter exponential distributions from censored samples. *Tecnometrics*, **2**, 403-406.

[5] Ganguly, A., Mitra, S., Samanta, D. and Kundu, D. (2012). Exact inference for the two-parameter exponential distribution under type-II hybrid censoring. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **142**, 613-625.

[6] Han, M. (1997). The structure of hierarchical prior distribution and its applications. *Chinese Operations Research and Management Science*, **6**, 31-40.

[7] Han, M. (2009). E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate. *Applied Mathematical Modelling*, **33**, 1915-1922.

[8] Han, M. (2011). E-Bayesian estimation of the reliability derived from binomial distribution. *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 2419-2424.

[9] Jaheen, Z. F. and Okasha, H. M. (2011). E-Bayesian estimation for the Burr type XII model based on type-2 censoring. *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 4730-4737.

[10] Jiang, L. and Wong, A. C. M. (2012). Interval estimations of the two-parameter exponential distribution. *Journal of Probability and Statistics*, doi:10.1155/2012/734575.

[11] Kundu, D. and Gupta, R.D. (2008). Generalized exponential distribution, Bayesian inference. *Computational Statistic and Data Analysis*, **52**, 1872-1883.

[12] Lam, K., Sinha, B. K. and Wu, Z. (1994). Estimation of Parameters in a two-Parameter exponential distribution using ranked set sample. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **48**, 723-736.

[13] Varde, S. D. (1969). Life testing and reliability estimation for the two parameter exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **64**, 621-631.

[14] Wang, J., Li, D. and Chen, D. (2012). E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of the system reliability parameter. *Systems Engineering Procedia*, **3**, 282-289.