توزیع نمایی دومتغیره با نرخ شکست ثابت

محمدباقر سپهری [۱]

چکیده

در این نوشتار ضمن تعریف نرخ شکست دوبعدی، نشان داده می‌شود که هیچ توزیع دومتغیره نمایی به طور مطلق پیوسته با نرخ شکست ثابت وجود ندارد، مگر در حالت خاصی که کناریها به طور مستقل توزیع شده باشند.

۱ مقدمه

از آنجا که در بسیاری از حالات، زمان عملکرد وسایل تا خرابی آنها (طول عمر) دارای توزیع نمایی است لذا می‌توان توزیع نمایی را به عنوان مدل مناسبی برای تحقیقات مرتبط با آزمایشات طول عمر مانند: آزمون طول عمر و تجزیه و تحلیل قابلیت اعتماد، به کار برد.

همچنین خواص خوب توزیع نمایی، مانند خاصیت عدم حافظگی، از آنجا که باعث سهولت عملیات محاسباتی می‌گردد، دلیل دیگری برای استفاده پی‌درپی این توزیع در قابلیت اعتماد است.

نظر به اینکه توزیع نمایی یک متغیره به طور مطلق پیوسته و دارای نرخ شکست ثابت است، انتظار می‌رود که در حالت دومتغیره (یا چند متغیره) نیز تابع توزیع به طور مطلق پیوسته و دارای نرخ شکست ثابت باشد.

در این نوشتار نشان داده می‌شود که چنین توزیع دو متغیره‌ای در صورتی وجود دارد که دو متغیر به طور مستقل توزیع شده باشند. در اینجا ابتدا مفهوم مدل احتمالی دو متغیره را بررسی نموده، سپس به تعریف نرخ شکست دوبعدی می‌پردازیم.

۲ مدل احتمالی دومتغیره

در محاسبه قابلیت اعتماد یک سیستم با چند جزء، به منظور سادگی محاسبات، فرض استقلال بین زمانهای خرابی اجزاء در نظر گرفته می‌شود؛ اما در بسیاری از حالات چنین فرضی اشتباه بوده، که در این‌صورت قابلیت اعتماد سیستم را می‌توان توسط

[۱] محمدباقر سپهری، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

تابع توزیع توأم، محاسبه نمود.
نتیجهٔ آزمایش در برپایی مدل احتمالی دومتغیره برای یک پدیده تصادفی پیوسته، مانند زمان تا خرابی دو جزء در یک سیستم و یا زمان خرابی و زمان تعمیر متناظر آن برای یک سیستم تعمیرپذیر، زوج عددی است که می‌توان آن را توسط دو متغیر تصادفی X و Y به صورت مدل درآورد. توزیع نمایی دومتغیره می‌تواند برای بیان رفتار شکست سیستم‌هایی با دو جزء که طول عمر هر کدام از آنها در طول مأموریت سیستم، مستقل از هم نبوده و به یکدیگر وابسته باشند، به کار برده شود.

۳ نرخ شکست دوبعدی

سیستمی را با دو جزء در نظر بگیرید، فرض کنید X و Y طول عمر دو جزء با توابع چگالی زیر باشند:

$$f_X(x) = \lambda_۱ e^{-\lambda_۱ x} \quad , \quad f_Y(y) = \lambda_۲ e^{-\lambda_۲ x}$$

$$\lambda_i > ۰ \quad , \quad i = ۱,۲ \quad , \quad ۰ < x, y < \infty$$

و فرض کنید $F(x,y)$ یک تابع توزیع به طور مطلق پیوسته با تابع چگالی $f(x,y)$ باشد به طوری که :

$$P(X = Y) = ۰$$

نرخ شکست دوبعدی در (x,y) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} r(x,y) &= \frac{f(x,y)}{P(X > x, Y > y)} \\ &= \frac{f(x,y)}{۱ + F(x,y) - F(x,\infty) - F(\infty,y)} \end{aligned}$$

در صورتی که X و Y از همدیگر مستقل باشند داریم:

$$\begin{aligned} r(x,y) &= \frac{f(x)f(y)}{P(X > x) \cdot P(Y > y)} \\ &= \frac{f(x)}{۱ - F(x)} \cdot \frac{f(y)}{۱ - F(y)} \\ &= r(x) \cdot r(y) \end{aligned}$$

که $r(x)$ و $r(y)$ نرخهای شکست یک بعدی می‌باشند.
از آنجاکه نرخ شکست توزیع نمایی ثابت است، انتظار می‌رود در یک توزیع نمایی دومتغیره، $r(x,y)$ برای هر x و y ثابت باشد.
در اینجا نشان می‌دهیم جز در حالت استقلال، چنین توزیع نمایی دومتغیره به طور مطلق پیوسته‌ای وجود ندارد.

۴ هدف اصلی

با فرض درست بودن چنین مطلبی، خواهیم داشت:
$F(x,y)$ یک تابع توزیع با تابع چگالی $f(x,y)$ می‌باشد. تابع قابلیت اعتماد دوبعدی را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$R(x,y) = P(X > x, Y > y)$$

اکنون می‌خواهیم $f(x,y)$ را به گونه‌ای بیابیم که:

$$r(x,y) = \frac{f(x,y)}{R(x,y)} = \lambda \qquad \lambda > ۰ \ , \ \text{ثابت}\lambda$$

از رابطهٔ فوق داریم:

$$f(x,y) = \lambda R(x,y) \qquad (۱)$$

که معادل است با:

$$\frac{\partial^۲ F(x,y)}{\partial x \partial y} = \lambda R(x,y)$$

و یا:

$$R_{xy}(x,y) - \lambda R(x,y) = ۰$$

که این یک معادله مشتق جزئی مرتبه دوم به صورت زیر می‌باشد

$$R_{xy}(x,y) = \frac{\partial^۲ \bar{F}(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

از رابطه (۱) داریم:

$$L[f(x,y)] = \lambda L[R(x,y)]$$

به منظور یافتن تبدیل لاپلاس $f(x,y)$ ابتدا تبدیل لاپلاس $R(x,y)$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \phi(s,t) &= L[R(x,y)] \\ &= \int_۰^\infty \int_۰^\infty e^{-(sx+ty)} R(x,y)\, dx\, dy \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء ابتدا نسبت به x داریم:

$$\begin{aligned}\phi(s,t) &= \int_0^\infty \{-\frac{1}{s}e^{-(sx+ty)}R(x,y)|_{x=0}^{\infty}\}dy \\ &+\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-(sx+ty)}R_x(x,y)\,dy\,dx\end{aligned}$$

سپس با انتگرال‌گیری جزء به جزء نسبت به y داریم:

$$\begin{aligned}\phi(s,t) &= \frac{1}{s}\{\frac{1}{t}-\int_0^\infty \frac{1}{t}e^{-ty}f(y)\,dy \\ &+\int_0^\infty (-\frac{1}{t}e^{-(sx+ty)}R_x(x,y)|_{y=0}^{\infty})dx \\ &+\frac{1}{t}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(sx+ty)}R_{xy}(x,y)\,dy\,dx\}\end{aligned}$$

با جایگذاری $R_{xy}(x,y)=\lambda R(x,y)$ در رابطه فوق، پس از محاسبات داریم:

$$\begin{aligned}\phi(s,t) &= \frac{1}{s}(\frac{1}{t}-\frac{1}{t}L[f(y)]-\frac{1}{t}L[f(x)]) \\ &+\frac{\lambda}{st}\phi(s,t)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \phi(s,t)=\frac{1-L[f(y)]-L[f(x)]}{(st-\lambda)} \qquad (۲)$$

حال اگر تبدیل لاپلاس $f(x,y)$ را با $\psi(s,t)$ نمایش دهیم داریم:

$$\psi(s,t)=\lambda\,\phi(s,t) \qquad (۳)$$

با توجه به اینکه در توزیع نمایی داریم:

$$L[f(x)]=\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1}\quad,\quad L[f(y)]=\frac{\lambda_2}{t+\lambda_2}$$

بنابراین روابط (۲) و (۳) به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned}\phi(s,t) &= \frac{st-\lambda_1\lambda_2}{(t+\lambda_2)(s+\lambda_1)(st-\lambda)} \\ \Rightarrow\quad \psi(s,t) &= \frac{\lambda(st-\lambda_1\lambda_2)}{(t+\lambda_2)(s+\lambda_1)(st-\lambda)}\end{aligned}$$

مشاهده می‌شود برای وجود داشتن تبدیل لاپلاس برای هر $s,t\geq 0$ بایست داشته باشیم:

$$\lambda=\lambda_1\lambda_2$$

بنابراین‌رابطه‌ی :

$$\psi(s,t)=\frac{\lambda_1\lambda_2}{(t+\lambda_2)(s+\lambda_1)}$$

تبدیل لاپلاس توزیعهای مستقل زمانی با X و Y نمایی، می‌باشد.

این نشان می‌دهد که توزیع نمایی دوبعدی به طور مطلق پیوسته‌ی با نرخ شکست ثابت نمی‌تواند وجود داشته باشد مگر X و Y در آن به طور مستقل توزیع شده باشند.

مراجع

[1] A. Z. Hamadani, *Bivariate Distributions Useful in Reliability*, Bulletin of Iranian Math. Society, Vol. 21, No. 2, pp. 1–31, (1995).

[2] A. P. Basv, *Bivariate Failure Rate*, JASA, Vol. 66, No. 333, pp. 103–104, (1995).

[3] T. A. Azlarov and N. A. Volodin, *Characterization Problems Associated with the Exponentiol Distribution*, Springer-Verlag, NewYork, (1986).