آنالیز ترکیبی ترازو و وزنه‌ها (قسمت دوم)

خسرو فضلی [۱]

چکیده

در قسمت اول مقاله [۱] به این موضوع پرداختیم که با تعدادی وزنه مشخص و یک ترازوی دوکفه چند مقدار مختلف قابل توزین است. در مقاله حاضر ضمن ادامه مطلب به بررسی این مسأله که چه مقادیری قابل توزین هستند، نیز می‌پردازیم.

۱ مقدمه و یادآوری

همانگونه که در [۱] نشان داده شده است با وزنه‌های $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ و یک ترازوی دوکفه حداکثر تعداد $\frac{۳^n-۱}{۲}$ مقدار مختلف قابل توزین است. پس اگر نماد $M(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ نشان دهنده تعداد مقادیر قابل توزین با مجموعه وزنه‌های $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ باشد، داریم:

$$M(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) \leq \frac{۳^n - ۱}{۲}$$

ضمناً نشان دادیم که یک شرط کافی برای برقراری تساوی این است که نامساویهای $x_k > ۲\sum_{i=۱}^{k-۱} x_i$ برای $۲ \leq k \leq n$ برقرار باشد. از طرفی نیز به سادگی دیده می‌شود که همواره $M(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) \geq n$ و تساوی فقط در صورتی برقرار است که همه وزنه‌ها برابر باشند.

بنابراین در حالت کلی:

$$n \leq M(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) \leq \frac{۳^n - ۱}{۲}$$

همچنین لازم است به این مطلب توجه شود که اگر C یک عدد حقیقی مثبت باشد، آنگاه:

$$M(cx_۱, cx_۲, \ldots, cx_n) = M(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$$

زیرا هر مقدار قابل توزین با وزنه‌های $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ کمیتی به صورت $W = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i x_i$ است که $\alpha_i = ۰, \pm ۱$ و درنتیجه $cW = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i (cx_i)$ بنابراین تناظر یک به یکی بین

[۱] خسرو فضلی، گروه ریاضی دانشگاه کردستان

مقادیر قابل توزین با $x_1, x_2, \ldots, x_n$ و مجموعه وزنه‌های $cx_1, cx_2, \ldots, cx_n$ وجود دارد.

۲ مقادیر قابل توزین

در مسأله وزنه‌ها و ترازو، علاوه بر این سؤال که چند مقدار مختلف را می‌توان وزن کرد، این سؤال نیز مطرح است که چه مقادیری قابل توزین می‌باشد؟ تحت شرایط خاصی که در قضیه زیر آمده می‌توان به این سؤال جواب داد:

قضیه ۱. فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مقادیر صحیحی هستند به طوری که $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i = N$. در این صورت هر مقدار صحیح از ۱ تا N قابل توزین است.

اثبات . چون وزنه‌ها صحیح هستند، پس هر کمیت قابل توزین نیز عددی صحیح است که بزرگترین آنها $N = \sum_{i=1}^{n} x_i$ می‌باشد و چون دقیقاً N مقدار را می‌توان توزین نمود، لذا این مقادیر عبارتند از $1, 2, \ldots, N$.

مثال ۱. با پنج وزن ۱، ۳، ۹، ۲۷، ۸۱ تمام مقادیر صحیح از ۱ تا ۱۲۱ قابل توزین است، زیرا همچنانکه در قسمت اول مقاله [۱]، نشان دادیم با این وزنه‌ها تعداد $121 = \frac{3^5-1}{2}$ مقدار را می‌توان وزن کرد و مجموع آنها نیز ۱۲۱ است.

حال فرض کنید با وزنه‌های دلخواه $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تعداد N مقدار قابل توزین است، و:

$$k = \frac{\sum_{i=2}^{n} x_i}{N}, \quad y_i = \frac{x_i}{k} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

در این صورت $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{k} = N$. پس اگر $y_1, y_2, \ldots, y_n$ مقادیر صحیحی باشند، تساوی $\sum_{i=1}^{n} y_i = N$ نشان می‌دهد که با این وزنه‌ها هر مقدار صحیح از ۱ تا N قابل توزین است و در نتیجه با $x_1, x_2, \ldots, x_n$ متناظراً مقادیر $k, 2k, \ldots, Nk$ را می‌توان وزن کرد.

۳ تعداد مقادیر قابل توزین

بدیهی است که ماهیت کمی وزنه‌ها تأثیر قاطعی بر تعداد مقادیر قابل توزین دارد. جنبه‌هایی از این مطلب در [۱] بررسی شده است. در این بخش به بیان برخی نتایج دیگر در این زمینه می‌پردازیم.

قضیه ۲. فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ اعداد طبیعی بیشتر از واحدی هستند که دوبه‌دو نسبت به هم اول می‌باشند. در این صورت با وزنه‌های $\ln x_1, \ln x_2, \ldots, \ln x_n$ دقیقاً تعداد $\frac{3^n-1}{2}$ مقدار مختلف قابل توزین است.

اثبات . هر مقدار قابل توزین M کمیتی به صورت $M = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i$ است که $\alpha_i = 0 \pm 1$. نشان می‌دهیم که مقدار M تناظر یک‌به‌یکی با ضرایب $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ دارد. برای این منظور فرض کنید ضرایب $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ چنان هستند که:

$$\begin{aligned} M = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln x_i \\ \ln \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} &= \ln \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i} \\ \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} &= \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i} \\ \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i - \beta_i} &= 1 \end{aligned}$$

واضح است که $\alpha_i - \beta_i = \pm 2, 0, \pm 1$ اما با توجه به اینکه x_i ها نسبت به هم اول هستند، فقط امکان $\alpha_i - \beta_i = 0$ قابل قبول است، زیرا اگر برای بعضی iها داشته باشیم $\alpha_i - \beta_i \neq 0$، آنگاه یا $\alpha_i - \beta_i > 0$ یا $\alpha_i - \beta_i < 0$. پس اگر x_iهایی که برای آنها $\alpha_i - \beta_i = \gamma_i > 0$ را با $y_1, \ldots, y_r$ و مواردی را که $\beta_i - \alpha_i = d_i > 0$ با $w_1, \ldots, w_s$ نشان دهیم داریم:

$$y_1^{\gamma_1} \, y_2^{\gamma_2} \, \cdots \, y_r^{\gamma_r} = w_1^{d_1} \, w_2^{d_2} \, \cdots \, w_s^{d_s}$$

اما این تساوی غیرممکن است زیرا اولاً y_iها و w_iها مقادیر مختلف x_iها هستند و ثانیاً همه عوامل چه در سمت راست

و چه در سمت چپ نسبت به هم اولند. بنابراین باید برای هر i داشته باشیم $\alpha_i = \beta_i$ و درنتیجه هر مقدار M به صورت منحصر به فرد با ضرایب $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n$ مشخص می‌شود. چون ۳^n ضریب وجود دارد که یکی از آنها مشخص کننده $M = ۰$ و نصف بقیه مشخص کننده $M > ۰$ هستند، لذا تعداد $\frac{۳^n-۱}{۲}$ مقدار برای $M > ۰$ داریم که همان مقادیر قابل توزین می‌باشند.

نتیجه . اگر $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ اعداد اول متمایز بزرگتر از واحد باشند، آنگاه دوبه‌دو نسبت به هم اول هستند و در نتیجه با وزنه‌های $\ln x_۱, \ln x_۲, \ldots, \ln x_n$ تعداد $\frac{۳^n-۱}{۲}$ مقدار مختلف قابل توزین است.

در قضیه زیر تأثیر گویابودن و گنگ‌بودن وزنه‌ها تا حدی مشخص شده است.

قضیه ۳. فرض کنید $x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}$ مقادیر گویا هستند و x_n گنگ می‌باشد در این صورت:

$$M(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}, x_n) = ۳M(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}) + ۱$$

اثبات . برای سادگی قرار دهید:

$$M(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}) = N$$

چون $x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}$ گویا هستند، پس N مقدار قابل توزین با آنها نیز گویا است. این مقادیر را با $w_۱, w_۲, \ldots, w_n$ نشان می‌دهیم. حال اگر همه n وزنه $x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}$ و x_n را به‌کاربریم مقادیری به شرح زیر را می‌توان توزین نمود:

$$
\begin{array}{lll}
(۱) & W_i & i = ۱, ۲, \ldots, n \\
(۲) & w_i + x_n & i = ۱, ۲, \ldots, n \\
(۳) & |w_i - x_n| & i = ۱, ۲, \ldots, n \\
(۴) & x_n &
\end{array}
$$

واضح است که تمام مقادیر گروه (۲) با هم تفاوت دارند و به علت اینکه x_n کمیتی گنگ است و w_iها گویا هستند، مجموعه مقادیر (۳) از هم متمایز بوده و در ضمن با (۲) نیز اشتراکی ندارند. همچنین به سادگی دیده می‌شود که تک مقدار x_n نیز با هیچکدام از موارد قبلی برابر نیست. بنابراین $۳N + ۱$ مقدار مختلف قابل توزین است.

نتیجه . تحت شرایط قضیه (۳) اگر $M(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}) = \frac{۳^{n-۱}-۱}{۲}$ آنگاه:

$$M(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}, x_n) = \frac{۳^n - ۱}{۲}$$

اثبات .

$$
\begin{aligned}
M(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}, x_n) &= ۳N + ۱ \\
&= ۳\frac{۳^{n-۱} - ۱}{۲} + ۱ \\
&= \frac{۳^n - ۳}{۲} + ۱ \\
&= \frac{۳^n - ۱}{۲}
\end{aligned}
$$

مراجع

[۱] خسرو فضلی، آنالیز ترکیبی ترازو و وزنه‌ها، اندیشه آماری، سال اول، شماره اول.