

نموگرافی برای نمونه‌هایی با تعداد معیوبهای صفر

دیود-اس-نیلسون

ترجمه : محمدباقر سپهری^۱

بالایی براساس درصد معیوب $100p$ برای سطوح مختلف اطمینان γ ، زمانی که هیچ قطعه‌ی معیوبی در نمونه n تایی یافت نشده باشد، به‌کار می‌بریم.

رابطه‌ی مورد نیاز عبارتست از:

$$\gamma = 1 - e^{-np_u} \quad (1)$$

که در آن :

$$\gamma = \text{سطح اطمینان}$$

$$n = \text{اندازه نمونه}$$

$$p_u = \text{حد بالای اطمینان نسبت معیوب}$$

نموگراف آرایه شده در شکل (۱) براساس رابطه‌ی (۱) تهیه شده است و به کمک این نمودار می‌توان یک جواب تقریبی برای هر یک از n ، γ یا $100p_u$ (حداکثر تعداد معیوب) به شرط داشتن دوتای دیگر، آرایه نمود. به منظور مشخص شدن

گاهی اتفاق می‌افتد که یک نمونه n تایی را به‌طور تصادفی از یک محموله با اندازه N انتخاب کرده، پس از بررسی مشاهده می‌کنیم که این نمونه شامل هیچ قطعه‌ی معیوبی نیست؛ یعنی تعداد قطعات معیوب در آن صفر است. استنتاج بدیهی در مورد محموله این است که : "محموله کاملاً بد نیست" زیرا حداقل دارای n قطعه‌ی خوب هست. اما به غیر از این نتیجه‌گیری کلی و ساده چه استنتاج‌های دیگری می‌توان در رابطه با نسبت قطعات معیوب در محموله آرایه داد؟ معمولاً آمارشناسان براین اعتقادند که اگر نمونه کمتر از ده درصد محموله باشد، مشخصه‌های محموله با خارج شدن نمونه تغییری نمی‌یابد، با این فرض می‌توان توزیع واقعی "فوق هندسی" را زمانی که نسبت قطعات معیوب (p) کمتر از ۱۰ درصد و اندازه‌ی نمونه حداقل ۳۰ باشد توسط توزیع دوجمله‌ای یا پواسون تقریب زد (جهت مقایسه‌های کمی این تقریبها به [۱] مراجعه شود).

در این مقاله کاربرد توزیع پواسون را جهت یافتن حدهای

^۱ محمدباقر سپهری، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

روش استفاده از نمودار به مثالهای زیر توجه کنید:

مشاهده می‌گردد که نمونه‌ای در حدود ۴۶۰ قطعه مورد نیاز است.

- مثال ۱ - از محموله‌ای با اندازه‌ی N (بیشتر از ۱۰۰۰) یک نمونه n تایی ($n = ۱۰۰$) انتخاب کرده‌ایم. مشاهده می‌شود که هیچ قطعه‌ی معیوبی در این نمونه وجود ندارد. هرگاه $\gamma = ۰/۹$ باشد، این محموله چقدر می‌تواند "بد" باشد؟
جواب: با قراردادن خط کش بر روی نمودار (شکل (۱)) به طوری که از دو نقطه‌ی ۱۰۰ و ۰/۹ بگذرد مشاهده می‌شود که درصد قطعات معیوب در محموله با اطمینان ۹۰ درصد بیشتر از ۲/۳ نمی‌تواند باشد.

همچنین مهندسين قابلیت اعتماد می‌توانند از این نمودار که بیانگر یک مدل واقعی نمایی است با در نظر گرفتن مقیاس‌های n به عنوان واحد زمان، و حداکثر درصد معیوب به عنوان مقیاس λ که λ عبارت است از حد بالایی اطمینان نرخ شکست، استفاده نمایند. بنابراین رابطه‌ی (۱) به صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\gamma = 1 - e^{-t\lambda}$$

- مثال ۳ - در آزمون طول عمر ۱۰ قطعه پس از گذشت ۵ واحد زمانی، آزمایش را قطع نموده‌ایم. با توجه به اینکه در $۵۰ = ۱۰ \times ۵$ واحد زمان هیچ قطعه‌ای خراب نشده است، حد بالای اطمینان نرخ شکست با ضریب اطمینان ۹۵ درصد چیست؟
جواب: با اطمینان ۹۵ درصد نرخ شکست می‌تواند کمتر از ۰/۰۶٪ شکست در واحد زمان باشد.

- مثال ۲ - اگر بدانیم یک درصد قطعات محموله‌ای معیوب هستند، یک نمونه را با چه اندازه‌ای می‌بایست انتخاب کنیم تا ۹۹ درصد امکان وجود حداقل یک قطعه‌ی معیوب در آن باشد؟
جواب: همانند مثال قبل، خط کش را بر روی نمودار طوری قرار می‌دهیم که از نقطه‌ی ۱ و ۰/۹۹ بگذرد

مراجع

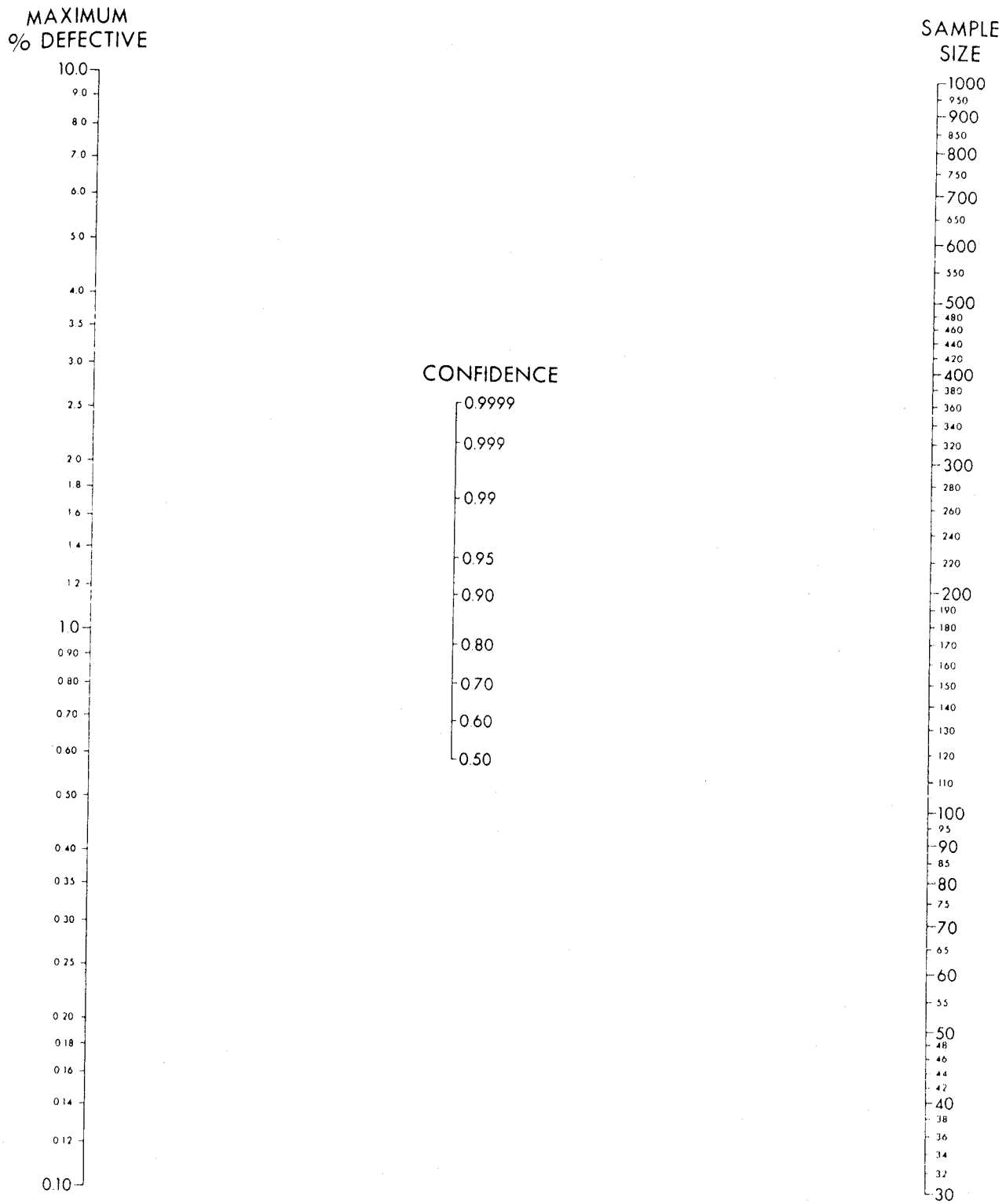
- [1] Dancan, A. D. *Quality Control and Industrial Statistics*. 3rd ed., Irwin, Homewood, Illions, 1965, pp. 87-89.

اصل این مقاله با عنوان

در Nomograph for Samples Having Zero defectives

Journal of Quality Technology, Vol. 10, No. 1, January 1978

به چاپ رسیده است.



شکل ۱: نموگراف تعیین تعداد نمونه با تعداد معیوبهای صفر

تجزیه‌ی تابع چگالی متقارن دوبعدی

ناهد سنجری فارسی پور^۱ هدیه جعفرپور^۲

چکیده

می دانیم که در تجزیه‌ی جداول توافقی مربعی، مدلی متقارن است که هم، شبه‌متقارن باشد و هم، تابع چگالی کناری آن همگن باشد و بالعکس [۱]. این مقاله تجزیه‌ای مشابه برای تابع چگالی دوبعدی ارائه می دهد، که ضمن ارائه چند مثال کاربردی، مسأله به حالت سه‌متغیره تعمیم داده شده است [۲].

۲ تقارن، شبه تقارن و همگن حاشیه‌ای

۱ مقدمه

فرض کنید (X, Y) یک متغیر تصادفی دوبعدی با تابع چگالی $f(x, y)$ باشد. به طوری که

$$f(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in D_{(a,b)}$$

$$f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \notin D_{(a,b)}$$

در این مقاله، ضمن معرفی تابع چگالی دوبعدی شبه متقارن، نشان داده می شود که شرط لازم و کافی برای متقارن بودن تابع چگالی، شبه متقارن و همگن حاشیه‌ای بودن آن است.

^۱دکتر ناهید سنجری فارسی پور، بخش آمار دانشگاه شیراز
^۲هدیه جعفرپور، بخش آمار دانشگاه شیراز

که در آن برای مقادیر ثابت دلخواه $c \in [a, b]$ داریم:

$$\alpha(c) = \beta(c) = \gamma(x, c) = \gamma(c, y) = 1$$

در این صورت روابط زیر برقرارند

$$k = f(c, c) \quad , \quad \gamma(x, y) = \frac{f(x, y)f(c, c)}{f(x, c)f(c, y)}$$

$$\alpha(x) = \frac{f(x, c)}{f(c, c)} \quad , \quad \beta(y) = \frac{f(c, y)}{f(c, c)}$$

تابع چگالی $f(x, y)$ در صورتی متقارن است که روابط زیر برقرار باشند:

$$\alpha(x) = \beta(x) \quad \gamma(x, y) = \gamma(y, x) \quad \forall x, y \in D_{[a, b]}$$

همچنین تابع چگالی $f(x, y)$ در صورتی شبه‌متقارن است که رابطه زیر برقرار باشد

$$\gamma(x, y) = \gamma(y, x) \quad \forall x, y \in D_{[a, b]}$$

۳ تجزیه‌ی تابع چگالی متقارن

در این قسمت به بیان و اثبات قضیه‌ای [۴] در مورد تجزیه‌ی توابع چگالی متقارن می‌پردازیم.

قضیه ۱-۳ تابع چگالی $f(x, y)$ متقارن است، اگر و فقط اگر، هم، شبه متقارن و هم، همگن حاشیه‌ای باشد.

اثبات: با فرض این‌که تابع چگالی $f(x, y)$ متقارن است، مشاهده کردیم که هم شبه متقارن و هم همگن حاشیه‌ای است. برای اثبات طرف دوم قضیه با فرض این‌که شبه متقارن است، از (۱) خواهیم داشت:

$$f_X(t) = k\alpha(t) \int_a^b \beta(u)\gamma(t, u)du \quad \forall t \in [a, b] \quad (۲)$$

$$f_Y(t) = k\beta(t) \int_a^b \alpha(z)\gamma(t, z)dz \quad \forall t \in [a, b] \quad (۳)$$

که در آن

$$D_{[a, b]} = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$$

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

(۱) تابع چگالی $f(x, y)$ متقارن است؛ اگر داشته باشیم:

$$f(x, y) = f(y, x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(۲) تابع چگالی $f(x, y)$ شبه متقارن است؛ اگر داشته باشیم:

$$\frac{f(t_1, t_2) f(t_2, t_2)}{f(t_2, t_2) f(t_1, t_2)} = \frac{f(t_2, t_1) f(t_2, t_2)}{f(t_2, t_2) f(t_2, t_1)}$$

$$\forall t_1 \leq t_2 \leq t_2 \leq t_2$$

به طوری که

$$(t_i, t_j) \in D_{[a, b]} \quad ; \quad i \neq j = 1, 2, 3, 4$$

(۳) تابع چگالی $f(x, y)$ همگن حاشیه‌ای است؛ اگر داشته

باشیم:

$$f_X(t) = f_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

که در آن $f_X(t)$ و $f_Y(t)$ به ترتیب تابع چگالی کناری X و Y هستند. از روابط زیر می‌توان مشاهده نمود که اگر تابع چگالی $f(x, y)$ متقارن باشد، شبه متقارن و همگن حاشیه‌ای نیز هست.

$$f_X(t) = \int_y f(t, y)dy$$

$$= \int_y f(y, t)dy \quad f(x, y) = f(y, x)$$

$$= \int_x f(x, t)dt \quad a \leq x, y \leq b$$

$$= f_Y(t)$$

با توجه به این‌که $f(x, y)$ متقارن است، رابطه‌ی شبه‌متقارن به راحتی نتیجه می‌شود.

تابع چگالی $f(x, y)$ را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم.

$$f(x, y) = k\alpha(x)\beta(y)\gamma(x, y) \quad \forall (x, y) \in D_{[a, b]}$$

$$= 0 \quad \forall (x, y) \notin D_{[a, b]} \quad (۱)$$

که این رابطه در تناقض با (۶) است. بنابراین به دست می آوریم که

$$h(t) = L \quad \forall t \in [a, b].$$

از رابطه (۴)، $\alpha(c) = \beta(c)$ خواهیم داشت $L = 1$ پس

$$\alpha(t) = \beta(t) \quad \forall t \in [a, b],$$

بنابراین تابع چگالی $f(x, y)$ متقارن است.

۴ مثال‌ها

مثال (۴-۱): فرض کنید متغیر تصادفی (Y, X) دارای توزیع نرمال دوبعدی باشد [۲]:

$$(X, Y) \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

در آن صورت:

$$\frac{f(x, y)}{f(y, x)} =$$

$$\exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x-y) \left\{ \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right)(x+y) - 2 \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_2}{\sigma_2^2} \right) - \frac{2\rho(\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} \right\} \right].$$

می توان مشاهده کرد که تابع چگالی نرمال $f(x, y)$ یک شبه متقارن بدون وابستگی به مقادیر پارامترهای $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$ است. این مطلب با استفاده از فرمول $\gamma(x, y)$ در رابطه‌ی (۱) و محاسبه‌ی $\gamma(y, x)$ و مشاهده‌ی برابری $\gamma(x, y)$ و $\gamma(y, x)$ قابل رؤیت است. با استفاده از قضیه (۳-۱) تابع چگالی نرمال $f(x, y)$ متقارن است، اگر و فقط اگر همگن حاشیه‌ای باشد. اما تابع چگالی نرمال $f(x, y)$ با $\mu_1 \neq \mu_2$ یا $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ متقارن نیست. بنابراین همگن حاشیه‌ای نخواهد بود.

با استفاده از قسمت دوم فرض قضیه، می دانیم که $f(x, y)$ همگن حاشیه‌ای است. پس روابط (۲) و (۳) با یکدیگر برابرند و خواهیم داشت:

$$\alpha(t) = \beta(t)h(t) \quad \forall t \in [a, b] \quad (۴)$$

که در آن

$$h(t) = \frac{\int_a^b \alpha(z)\gamma(t, z)dz}{\int_a^b \beta(u)\gamma(t, u)du} \quad (۵)$$

با جایگذاری (۴) در (۵) به دست می آوریم:

$$h(t) = \int_a^b \Delta(t, z)h(z)dz \quad \forall t \in [a, b] \quad (۶)$$

که در آن

$$\Delta(t, z) = \frac{\beta(z)\gamma(t, z)}{\int_a^b \beta(u)\gamma(t, u)du}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned} \int_a^b \Delta(t, z)dz &= \int_a^b \frac{\beta(z)\gamma(t, z)}{\int_a^b \beta(u)\gamma(t, u)du} dz \\ &= \frac{1}{\int_a^b \beta(u)\gamma(t, u)du} \int_a^b \beta(z)\gamma(t, z)dz = 1 \end{aligned}$$

اگر برای هر $t \in [a, b]$ $h(t) = L$ آنگاه (۶) حاصل می شود. چون

$$\int_a^b \Delta(t, z)dz = 1$$

اگر برای بعضی از مقادیر $t \in [a, b]$ $h(t) \neq L$ آنگاه

$$\begin{aligned} \int_a^b \Delta(t, z)h(z)dz &< h(x_0) \int_a^b \Delta(t, z)dz \\ &= h(x_0) \quad \forall t \in [a, b] \quad (۷) \end{aligned}$$

وقتی که

$$h(x_0) = \max h(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

بنابراین از (۷) داریم

$$\int_a^b \Delta(x_0, z)h(z)dz < h(x_0)$$

مثال (۴-۲): تابع چگالی $f(x, y)$ را به صورت زیر در

نظر می‌گیریم: [۳]

تابع چگالی سه متغیره‌ی $f(x, y, z)$ متقارن کامل است اگر

$$f(x, y, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y) =$$

$$f(x, z, y) = f(z, y, x) = f(y, x, z) .$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4 \cdot \pi^2} (x \sin y + 2y \sin x + 10)$$

$$\forall (x, y) \in D_{[-\pi, \pi]}$$

$$= 0 \quad \forall (x, y) \notin D_{[-\pi, \pi]} .$$

تابع چگالی سه متغیره‌ی $f(x, y, z)$ همگن حاشیه‌ای است اگر همگن حاشیه‌ای یک بعدی و همگن حاشیه‌ای دوبعدی باشد و در روابط زیر صدق کند:

$$f_X(t) = f_Y(t) = f_Z(t), \quad \text{همگن حاشیه‌ای یک بعدی}$$

$$f_{X,Y}(t, r) = f_{Y,X}(t, r), \quad \text{همگن حاشیه‌ای دو بعدی}$$

$$f_X(t) = f_Y(t) = \frac{1}{\pi} \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

$$= 0 \quad \forall t \notin [-\pi, \pi],$$

اما،

$$f(x, y) - f(y, x) = \frac{y \sin x - x \sin y}{4 \cdot \pi^2} \quad \forall (x, y) \in D_{[-\pi, \pi]} .$$

ملاحظه می‌کنیم که تابع چگالی $f(x, y)$ متقارن نمی‌باشد؛ که عدم تقارن، بنا به قضیه (۳-۱) به علت فقدان شبه‌تقارن است.

با ارایه فرمولی برای شبه متقارن می‌توان قضیه (۳-۱) را در حالت سه بعدی نیز اثبات نمود.

مراجع

- [1] Bishop, Y. M. M., Fienberg, S. E., and Holland, P. W. (1975) : *Discrete Multivariate Analysis : Theory and Practice*, Cambridge, Mass : The MIT Press.
- [2] Caussinus, H. (1965) : *Contribution a l'analyse statistique des tableau-x decorrelation*, Annales de la Faculte des sciences l'Universsite de Toulouse 29, 77-182.
- [3] Tong, Y. L. (1990) : *The Multivariate Normal Distribution*, New York Springer-Verlag.
- [4] Tomizawa, S., Seo, T., and Minaguchi, J. (1996). *Decomposition of bivariate symmetric density function*, Calcutta Statistical Association Bulletin, 46, 129-133.