

## طرحهای بهینه در مسائل رگرسیون چندجمله‌ای

حسن شاهقلیان\*

### چکیده

تعیین روابط بین متغیرهایی که اندازه‌گیری آنها با عدم حتمیت صورت می‌گیرد، در رشته‌های مختلف علمی از اهمیت زیادی برخوردار است. برای تعیین این روابط به طور تجربی، لازم است که آزمایشهایی با طرحهای معینی انجام شوند. مشخص کردن مقادیر متغیر مستقل به طوری که نتایج از نوعی بهینگی برخوردار باشند مسأله طرحهای بهینه را پیش آورده است. در این مقاله، با تعریف ملاکهای بهینگی، نحوه تعیین طرحهای بهینه از نوع  $D$ -بهینه را تشریح می‌کنیم.

### مقدمه

$Y_1, \dots, Y_n$  نمایش داده که هر  $Y_i$  به صورت  $Y_i = f'(X_i)\theta + \varepsilon_i$  خواهد بود. به صورت ماتریسی مدل را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$Y = W\theta + \varepsilon$$

که در آن بردار  $Y$  بردار  $n \times 1$ ،  $W$  ماتریس  $n \times k$  از مشاهدات است که  $k$  -امین سطر آن بردار  $f'(X_i)$  بوده و  $X_i$ ها مقادیری در مجموعه  $\Omega$ ، زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی‌اند. با فرض اینکه  $W'W$  وارون پذیر باشد، با استفاده از روش کمترین توانهای دوم برآورد  $\theta$  عبارت است از

$$\hat{\theta} = (W'W)^{-1}W'Y$$

با واریانس

$$V(\hat{\theta}) = \sigma^2(W'W)^{-1}$$

تجربه علمی نشان داده است که در برخورد با پدیده‌های طبیعت، مطالعه رفتارهای این گونه پدیده‌ها نیاز به ساختن قالب یا قالبهایی دارد که موارد مشابه را بتواند در خود جای داده و بیان کننده خصایص مشترک آنها باشد. یکی از راههای ساختن این قالبها، استفاده از فرمولهای ریاضی و مدل‌های آماری است. از رایجترین این مدلها، مدل رگرسیونی است که از آن برای مطالعه میزان تأثیر متغیرهای ورودی  $X = (x_1, \dots, x_p)$  (که قابل مشاهده‌اند) بر روی یک متغیر پاسخ  $Y$  استفاده می‌شود. فرض می‌کنیم رابطه  $X$  و  $Y$  (مدل) به صورت

$$Y = f'(X)\theta + \varepsilon$$

باشد که در آن  $f = (f_1, \dots, f_k)$  برداری از توابع معلوم،  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$  برداری از پارامترهای نامعلوم و  $\varepsilon$  خطای تصادفی (خطای انحراف از مدل) با توزیع  $N(0, \sigma^2)$  است.

حال اگر  $n$  مشاهده از  $Y$  داشته باشیم، می‌توان مشاهدات را با

مسأله طرح‌ریزی، انتخاب مقادیر  $X_i$ ،  $i = 1, 2, \dots, n$ ، از فضای  $\Omega$  به

\* حسن شاهقلیان، عضو هیأت علمی دانشگاه شهرکرد

### ۱ طرح‌ریزی

**(ب) معیار  $G$  بهینه**

اگر واریانس  $\hat{\theta}$  را برای مقداری خاص از  $X$  در نظر بگیریم، این ماتریس به صورت  $\frac{\sigma^2}{n} f'(X) M^{-1}(h) f(X)$  در خواهد آمد که برای راحتی آن را به صورت  $\frac{\sigma^2}{n} d(X, g)$  نشان می‌دهیم، چنانچه مقدار  $d(X, g)$  را برای بدترین مشاهده  $X$  بتوانیم مینیم کنیم، معیار دیگری به نام  $G$  بهینه به دست می‌آید. لذا  $h^*$  را یک طرح  $G$ -بهینه برای  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  گویند هرگاه

$$\min_h \max_{X \in \Omega} d(X, h) = \max_{X \in \Omega} d(X, h^*).$$

**(پ) معیار کلی  $\phi$ -بهینه**

این معیار کلی‌ترین معیار بهینگی است که در آن به جای ماتریس  $M^{-1}(h)$ ، ماتریس  $J(h) = (KM^{-1}(h)K')^{-1}$  در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که از این معیار می‌توان در دو حالت استفاده کرد، حالتی که تمام پارامترهای بردار  $\theta$  مورد نظر است و حالتی که فقط بعضی از آنها مورد نظر هستند. به همین منظور به جای  $\theta$  بردار  $K\theta$  در نظر گرفته شده که  $K$  ماتریس معلوم  $s \times k$  با مرتبه  $k$  است. نظر به اینکه ممکن است ماتریس اطلاع همیشه وارون‌پذیر نباشد، در این معیار به جای  $M^{-1}(h)$  از وارون تعمیم‌یافته ماتریس  $M(h)$  استفاده کرده آن را با  $M^{-1}(h)$  نشان داده‌ایم. بدیهی است چنانچه ماتریس  $M(h)$  وارون‌پذیر باشد در فرمول  $J(h)$  همان  $M^{-1}(h)$  قرار می‌گیرد.

معیارهای دیگری از قبیل  $E$ -بهینه و طرحهای بلوکی و  $A$ -بهینه و  $C$ -بهینه و ... وجود دارند که ما در اینجا از ذکر آنها خودداری می‌کنیم.

مثال: رگرسیون درجه دوم روی فضای  $\Omega = [-1, 1]^q$

در مدل خطی  $y = f'(X)\theta + \varepsilon$  فرض کنیم  $\Omega$  شامل تمام نقاط به شکل

$$\Omega = \{X = (x_1, \dots, x_q); -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, q\}$$

باشد که اصطلاحاً آن را مکعب می‌گوییم. بردار  $f(X)$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$f'(X) = (1, x_1^2, \dots, x_q^2, x_1, \dots, x_q, x_1 x_2, \dots, x_{q-1} x_q)$$

و نیز

$$\theta' = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_q, \theta_{q+1}, \dots, \theta_{2q}, \theta_{2q+1}, \dots, \theta_{(q+1)(q+1)}).$$

بهترین صورت است. واضح است که با تغییر  $X_i$ ها متغیر پاسخ نیز عوض خواهد شد و برآورد  $\theta$  یعنی  $\hat{\theta}$  نیز تحت تأثیر قرار خواهد گرفت، به عنوان مثال اگر مسأله رگرسیون، مطالعه برخی از خصوصیات کودکان و به ویژه اگر متغیر ورودی وزن کودک و متغیر پاسخ قد کودک باشد، انتخاب کودک خود یکی از مشکلات اولیه کار است، از این رو نیاز به معیارهایی داریم که انتخاب  $X_i$ ها را برای دستیابی به «بهترین طرح» میسر سازد. ذیلاً برخی از این معیارها را معرفی می‌کنیم یکی از راههایی که می‌توان از طریق آن معیاری برای بهینگی پیدا کرد، توجه به ماتریس واریانس-کواریانس  $\hat{\theta}$  است که برحسب ماتریس اطلاع به صورت  $\frac{\sigma^2}{n} M^{-1}(h)$  است (رجوع کنید به [۲]) که در آن  $\sigma^2$  واریانس خطای تصادفی و  $n$  مجموع تعداد تکرارها، مقادیری ثابت‌اند.

چنانچه هر  $X_i$  به تعداد  $n_i$  بار ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) تکرار شود، ماتریس اطلاع به صورت

$$M = nW'W = \sum_{i=1}^K n_i f(X_i) f'(X_i), \sum_{i=1}^K n_i = n$$

خواهد بود، زیرا این وضعیت معادل است با اینکه متغیر تصادفی‌ای با توزیع  $h$  داشته باشیم که مقادیر  $X_1, \dots, X_k$  را با احتمالهای  $\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_k}{n}$  اختیار کند. در این صورت ماتریس  $M$  به صورت

$$M(h) = E(f(X)f'(X))$$

خواهد بود. لذا یک طرح را می‌توان یک اندازه‌گیری شمارشی روی فضای  $\Omega$  در نظر گرفت که به نقاط (متاهی)  $X_1, \dots, X_k$  اندازه‌های مثبت  $\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_k}{n}$  را منتسب می‌کند.

در طرح‌ریزی بهینه، هدف به نحوی ماکسیم کردن ماتریس  $M$  (یا مینیم کردن  $M^{-1}$ ) روی کلیه  $h$ هایی است که دارای تکیه‌گاه متاهی هستند.

**۲ تعریف برخی از معیارهای بهینگی****(الف) معیار  $D$ -بهینه**

چون ماتریس واریانس-کواریانس  $\hat{\theta}$  برحسب ماتریس اطلاع برابر  $\frac{\sigma^2}{n} M^{-1}(h)$  است، در این معیار قصد آن است که درمیان این ماتریس مینیم شود، به عبارت دیگر طرح  $h^*$  برای  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  را  $D$ -بهینه گویند هرگاه

$$\det M^{-1}(h^*) = \min_h \det M^{-1}(h).$$

مؤلفه‌های سوم تا  $q$ -ام سطر دوم همگی برابرند با:

$$r = \sum_{\{-1,0,1\}} x_i^2 h(x_1, x_2) \\ = 2^{q-2}(\lambda\alpha + 4(q-2)\beta + (q-2)(q-3)\gamma)$$

حال اگر این مقادیر را در ماتریس  $M(h)$  قرار داده و آن را وارون کنیم به صورت:

$$M^{-1}(h) = \begin{bmatrix} H^{-1} & & \\ & U^{-1}I_q & \\ & & V^{-1}I_{q(q-1)} \end{bmatrix}$$

به دست خواهد آمد که در آن

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & c & d & \dots & d \\ \vdots & d & \dots & & \\ b & d & \dots & & c \end{bmatrix} \\ a = \frac{(q-1)v+u}{(q-1)v+u-qu^2} \\ b = \frac{-u}{(q-1)v+u-qu^2} \\ c = \frac{(q-1)v+u-(q-1)u^2}{(q-v)((q-1)v+u-qu^2)} \\ d = \frac{u^2-v}{(u-v)((q-1)v+u-qu^2)}$$

بدین ترتیب دترمینان ماتریس  $M(h)$  برابر خواهد بود با

$$\det M(h) = u^q v^{\frac{q(q-1)}{2}} (q-v)^{q-1} (u+(q-1)v-qu^2)$$

اینک باید  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  را به گونه‌ای محاسبه کنیم که اندازه  $h$  بتواند  $D$ -بهینه باشد که بعد از محاسبات بسیار طولانی خواهیم داشت:

$$\alpha = (2^{q+2}(q+2)^2(q+1))^{-1} \{ (4q^6 + 12q^5 - 25q^4 - 107q^3 + 85q^2 + 479q + 128 - (2q^2 - q - 19)q(q-1)) \times (q+3)\sqrt{4q^2 + 12q + 17} \}$$

$$\beta = (2^{q+2}(q+2)^2(q+1))^{-1} \{ -(4q^5 + 16q^4 - 11q^3 - 143q^2 - 149q + 139) + (q+3)(q-1)(2q^2 + q - 15)\sqrt{4q^2 + 12q + 17} \}$$

$$\gamma = (2^{q+1}(q+2)^2(q+1))^{-1} \{ (4q^4 + 24q^3 + 43q^2 - 24q - 119 - (q+3)(2q^2 + 3q - 11)\sqrt{4q^2 + 12q + 17} \}$$

یک طرح  $D$ -بهینه  $h$  عبارت است از اندازه احتمال  $h$  که به هر کدام از گوشه‌های این مکعب اندازه‌ای را نسبت دهد. این طرح برای حالت  $q = 1$  و  $q = 2$  ساده‌است، لذا حالت  $q \geq 2$  را بررسی می‌کنیم.

$h$  را به این صورت معرفی می‌کنیم که تنها به نقاط گوشه و نقاط میانی هر ضلع و نقاط مرکز هر وجه به ترتیب اندازه‌های  $\alpha$ ،  $\beta$ ، و  $\gamma$  را نسبت داده و به بقیه نقاط فضا اندازه صفر نسبت دهد. به منظور ایجاد تقارن در فضای  $q$  بعدی (مکعب) گوشه به نقاطی می‌گوییم که مختصات آنها تنها اعداد  $1$  و  $-1$  (بدون صفر)، نقطه میانی ضلع را نقطه‌ای می‌گیریم که مختصات آن اعداد  $1$  و  $0$  و  $-1$  (دقیقاً دارای یک صفر)، و منظور از نقطه مرکز وجه نقطه‌ای است که مختصات آن اعداد  $1$  و  $0$  و  $0$  و  $-1$  (دقیقاً دارای دو صفر) باشد.

حالت  $q = 2$  :

نقاط گوشه :  $A_1, A_2, A_3, A_4$

نقاط میانی :  $B_1, B_2, B_3, B_4$

نقطه مرکز :  $C$

حالت  $q = 3$  :

نقاط گوشه :  $A_1$

نقاط میانی :  $B_1, B_2, B_3$

نقطه مرکز :  $C_1, C_2, C_3$

در این صورت به کمک روشهای شمارش می‌توان نشان داد که این فضا دارای  $2^q$  گوشه،  $q2^{q-1}$  نقطه میانی و  $q(q-2)2^{q-2}$  نقطه مرکز است. (توجه کنید که در شکل بالا برای حالت  $q = 3$  نصف فضای  $\Omega$  نمایش داده شده است، در حقیقت حالتی نمایش داده شده که  $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega : 0 \leq x_i \leq 1$  و  $q > 2$  صدق می‌کند). از آنجا که محاسبات برای  $q \geq 6$  بسیار طولانی و خسته کننده است تنها برای  $q = 2, 3, 4, 5$  طرح بهینه را تعیین خواهیم کرد.

ماتریس اطلاع حاوی درایه‌های زیر است:

$$m_{ij}(h) = \sum_{\{-1,0,1\}} f_i(X)f_j(X)h(X).$$

در این ماتریس چهار نوع مؤلفه وجود دارد:

$$m_{11}(h) = 1$$

مؤلفه‌های دوم تا  $q$ -ام سطر اول همگی برابرند با:

$$u = \sum_{\{-1,0,1\}} x_i^2 h(X) \\ = 2^{q-2}(\lambda\alpha + 4(q-1)\beta + (q-1)(q-2)\gamma)$$

و بدین ترتیب طرح  $D$ -بهینه  $h$  به دست می‌آید. به عنوان مثال برای چند مقدار خاص  $q$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$ , و  $\gamma$  به شرح زیرند:

$q$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
۲	۰٫۱۴۵۸	۰٫۰۸۰۱۵	۰٫۰۹۶۲
۳	۰٫۰۷۱۹۷۵	۰٫۰۱۸۹۵	۰٫۰۳۲۸
۴	۰٫۰۳۷۰۵	۰٫۰۰۳۸۳۷۵	۰٫۰۱۱۸۵
۵	۰٫۰۱۹۲۸	۰٫۰۰۰۳۱۲۵	۰٫۰۰۴۴۷۵

## مراجع

- [1] Studden, W. J. (1989) "Note on some  $p$ -omital designs for polynomial regression" The Annl. of Stat. Vol. 17, No. 2, pp 618-623.
- [2] Gaffke, N. (1985) "Singular information matrices, directional derivatives, and subgradients in optimal design theory" In linear stat. inf., Proc. Internat. Conf. Poznan (Poland) (T. Calinski and W. Klenechki, eds) pp 61-77.
- [3] Calil, Z. and Kiefer. J. (1980) "D-optimal weighing designs" Annl. Stat. Vol. 8 No. 6, pp 1239-1306.
- [4] Gaffke, N. (1987) "Further Characterizations of design optimality and admissibility for partial paramter estimation in linear regression" The Annl. of Stat. Vol. 15. No, 3, pp 942-957.
- [5] John, R. C. St. and Draper, N. R. (1975) "Optimality for regression designs" Vol. 17, No. 1, pp 15-23.
- [6] Fedorov, V., V. (1972) "Theory of optimal experiments", Academic Press, New York.