تعمیم احتمالاتی قضیهٔ تیلر

ویلیام مسی وارد ویت

علی خسروبیگی*

چکیده

تعمیمهایی احتمالاتی از قضیهٔ اساسی حسابان و قضیهٔ تیلور را به دست آورده‌ایم که با تصادفی کردن بازهٔ مقادیر x حاصل شده‌اند. جملات باقیمانده برحسب تکرارهای توزیع مانا ـ زیادتی یا توزیع طول عمر مانده تعادلی از نظریهٔ فرایندهای تصادفی نقطه‌ای بیان شده‌اند. می‌توان تعمیم احتمالاتی قضیهٔ تیلور را برای تقریب میانگین تعداد سرویس دهنده‌های مشغول در یک سیستم صف بندی $M_t/G/\infty$ در هر لحظه به کار برد.

۱ نتیجه

ما تعمیمهایی احتمالاتی از قضیهٔ اساسی حسابان و قضیهٔ تیلور را ارائه می‌دهیم که با تصادفی کردن بازهٔ مقادیر x حاصل می‌شوند. برای این منظور، فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی با میانگین متناهی $E[X]$ و X_e یک متغیر تصادفی نامنفی با توزیع

$$P(X_e \le x) = \frac{\int_0^x P(X \ge y)dy}{E[X]} \qquad x \ge 0 \tag{۱}$$

باشد که دارای گشتاور kام

$$\begin{aligned} E[X_e^k] &= k\int_0^\infty x^{k-1}P(X_e \ge x)dx \\ &= \int_0^\infty \frac{y^k P(X \ge y)dy}{E[X]} \\ &= \frac{E[X^{k+1}]}{(k+1)E[X]} \end{aligned} \tag{۲}$$

است.

توزیع X_e در چارچوب مدلهای فرایند نقطه‌ای، توزیع مانا ـ زیادتی (زمان ـ بازگشت پیشرو مانا یا طول عمر ماندهٔ تعادلی) نامیده می‌شود؛ نگاه کنید به دیلی و ورجونز (۱۹۸۸، صص ۷۱،۵۳) مثلاً اگر فواصل زمانهای ورود متوالی اتوبوس به یک ایستگاه مستقل و همتوزیع $(i.i.d)$ بر مبنای X باشد، در این صورت در دراز مدت، توزیع مدت زمانی که شخصی که وارد ایستگاه اتوبوس می‌شود، باید منتظر اتوبوس بعدی (مستقل از فرایند ورود) باشد بر طبق توزیع X_e است؛ نگاه کنید به ولف (۱۹۸۹، صص ۵۵، ۶۵).

از (۱) آشکار است که می‌توانیم توزیع مانا ـ زیادتی را به عنوان تصویر یک عملگر مانا ـ زیادتی بر فضای توزیعهای احتمال در بازهٔ $[0,\infty)$ در نظر بگیریم؛ اگر $E[X] = \infty$، آنگاه $P(X_e = \infty) = 1$. ما به تکرارهای متوالی این عملگر، علاقه‌مند هستیم. برای این منظور، فرض کنید برای $n \ge 1$، $X_e^{(n)} = (X_e^{(n-1)})_e$ و برای متغیر تصادفی نامنفی X، $X_e^{(0)} = X$. برای ملاحظه موارد دیگری که در آنها تکرارهای عملگر مانا ـ زیادتی پیش می‌آیند، نگاه کنید به هارکنس و شانتارام (۱۹۵۹)، شانتارام و هارکنس (۱۹۷۲)، وان بیک و برات (۱۹۷۳)، ویت (۱۹۸۵)، ابات و ویت (۱۹۸۸) و ایک، مسی، ویت (۱۹۹۲).

برای بیان تعمیم احتمالاتی قضیهٔ تیلور، فرض کنید f تابعی با مقادیر حقیقی از یک متغیر حقیقی باشد. به علاوه فرض کنید $f^{(n)}$ نشان دهندهٔ مشتق nام f باشد با $f^{(0)} = f$.

---

*) علی خسروبیگی، دانشجوی کارشناسی‌ارشد آمار بیمه، دانشگاه شهید بهشتی

قضیه. برای هر $n \geq 1$، فرض کنید که f، n بار مشتق‌پذیر و برای هر x مثبت $f^{(n)}$ در بازهٔ $[t, t+x]$ ریمان انتگرال‌پذیر باشد. اگر $E[X^n] < \infty$ و $E[|f^{(k)}(t+X_e^{(k)})|] < \infty$، $0 \leq k \leq n$، آنگاه $E[|f(t+X)|] < \infty$ و

$$E[f(t+X)] = \sum_{k=0}^{n-1} E[X^k]\frac{f^{(k)}(t)}{k!} + E[f^{(n)}(t+X_e^{(n)})]\frac{E[X]}{n!}.$$

تذکرات. (۱) توجه کنید که برای Xهای تعیینی، قضیهٔ فوق برای $n = 1$، قضیهٔ اساسی حسابان و برای $n \geq 1$ صورتی از قضیهٔ تیلور را بیان می‌کند؛ نگاه‌کنید به رودین (۱۹۶۴ صص ۹۵، ۱۱۵). اگر $P(X = x) = 1$ آنگاه X_e دارای توزیع یکنواخت بر بازهٔ $[0, x]$ است، یعنی $P[X_e \leq t] = t/x$، $0 \leq t \leq x$.

(۲) توزیع X_e وقتی $E[X] < \infty$ بر توزیع X منطبق می‌شود اگر و تنها اگر X توزیع نمایی داشته باشد. نگاه کنید به نتیجهٔ ۳ـ۳ و بخش ۵ ویت (۱۹۸۵).

(۳) در اولین شرط قضیه، در واقع کافی است که $f^{(k)}$ به ازای $0 \leq k \leq n-1$ نسبت به اندازهٔ لبگ مطلقاً پیوسته باشد، که در این صورت $f^{(n-1)}$ تقریباً همه جا مشتق‌پذیر و برابر است با انتگرال نامعین $f^{(n)}$؛ نگاه کنید به رویدن (۱۹۶۸ صص ۱۰۴-۱۰۸).

(۴) توسیعهای فرمول دینکین برای فرایندهای تصادفی مارکوف در آتریا و کرتس (۱۹۷۳) و مراجع ذکر شده در آن ذاتاً مشابه قضیهٔ ماست.

۲ برهان

پیش از اثبات قضیه، عبارتهایی برای کلیهٔ گشتاورهای متغیرهای مانا ـ زیادتی تکراری ارائه می‌دهیم. فرض کنید $(n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1)$.

لم. برای $1 \leq n$ و $1 \leq k$، اگر $E[X^n] < \infty$، آنگاه

$$E\left[(X_e^{(n)})^k\right] = \frac{n!E[X^{n+k}]}{(n+k)_n E[X^k]}.$$

برهان. رابطهٔ (۲) و استقرا روی n و k را به کار برید.

برهان قضیه. استقرای ریاضی را به کار می‌بریم. برای بررسی حالت $n = 1$، قضیهٔ اساسی استاندارد حسابان صفحهٔ ۱۱۵ کتاب رودین (۱۹۶۴)، و قضیهٔ فوبینی (با شرایط گشتاوری) را به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} E[f(t+X) - f(t)] &= E[\int_0^X f^{(1)}(t+u)du] \\ &= E[\int_0^\infty I_{\{X \geq x\}} f^{(1)}(t+u)du] \\ &= \int_0^\infty P(X \geq u) f^{(1)}(t+u)du \\ &= E[f^{(1)}(t+X_e)]E[X]. \end{aligned} \tag{3}$$

برای انجام استقرا، صرفاً نتیجهٔ حاصل شده برای $n = 1$ را با یک تابع جدید به کار می‌بریم. برای این منظور برای $n \geq 1$ جملهٔ باقیمانده را به صورت

$$R_n f(t,x) \equiv f(t+x) - \sum_{k=0}^{n-1} x^k \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \tag{4}$$

تعریف و فرض می‌کنیم

$$R_0 f(t,x) \equiv f(t+x).$$

چون بنابر لم

$$\prod_{k=0}^{n-1} E[X_e^{(k)}] = \frac{E[X^n]}{n!},$$

برای اثبات قضیه، باید نشان دهیم که

$$E[R_n(t,X)] = E[f^{(n)}(t+X_e^{(n)})] \prod_{k=0}^{n-1} E[X_e^{(k)}] \tag{5}$$

که برای $n = 1$ این کار انجام شده است. حال توجه کنید که $R_n f$ دارای ویژگی‌های زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial x} R_n f(t,x) = R_{n-1} f^{(1)}(t,x)$$

و

$$R_n f(t; 0) = 0 \tag{6}$$

بنابراین، می‌توانیم (۶) و نتیجهٔ ثابت شده برای $n = 1$ را در مورد تابع جدید $f^*(t+x) \equiv R_n f(t,x)$ با ثابت در نظر گرفتن t به کار ببریم و به دست آوریم

$$\begin{aligned} E[R_n f(t,x)] &= E[\frac{\partial}{\partial x} R_n f(t, X_e)]E[X] \\ &= E[R_{n-1} f^{(1)}(t, X_e)]E[X]. \end{aligned} \tag{7}$$

با استقرا روی n، رابطهٔ (۵) را از (۷) به دست می‌آوریم. البته، باید شرایط گشتاوری را در این مرحلهٔ آخر تحقیق کنیم. امّا این کار به سادگی انجام می‌شود. بنابر (۴) و (۶) داریم:

$$|R_n f(t,x)| \leq |f(t+x)| + \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k \frac{|f^{(k)}(t)|}{k!}, \tag{8}$$

و

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k R_n f(t,x)\right| \le \left|f^{(k)}(t+x)\right| + \sum_{k=0}^{n-k-1} \frac{|x|^k|f^{(k)}(t)|}{k!}. \qquad (۹)$$

بنابراین شرایط گشتاوری در نظر گرفته شده همراه با لم مستلزم آن است که

$$E[|R_n^{(k)} f(t, X_e^{(k)})|] < \infty, \quad 0 \le k \le n \text{ برای} \qquad (۱۰)$$

و

$$E[X_e^{(k)}] < \infty, \quad k \le n-1 \text{ برای}$$

۳ یک کاربرد: صفهای نامانا

علاقهٔ ما به این مسأله از در نظر گرفتن مدل صف‌بندی $M_t/G/\infty$ ناشی شد که بینهایت سرویس دهنده، یک فرایند ورود پواسون همگن با تابع نرخ ورود زمان وابستهٔ λی تعیینی و زمانهای سرویس $i.i.d$ داشتند به طوری که این زمانهای سرویس از فرایند ورودی مستقل‌اند؛ نگاه کنید به ایک و همکاران (۱۹۹۲). برای شرایط اولیهٔ مناسب، تعداد سرویس دهنده‌های مشغول در زمان t دارای توزیع پواسون با میانگین

$$m(t) = E\left[\int_{t-X}^{t} \lambda(u)du\right] \qquad (۱۱)$$

است که X متغیر تصادفی با توزیع زمان سرویس است. این وضعیت با قرار دادن

$$f(t+x) = \int_{t-x}^{t} \lambda(u)du \quad x \ge 0 \qquad (۱۲)$$

به حالت خاصی از مسألهٔ بالا تبدیل می‌شود. از (۱۱) و (۱۲)، با $n = 1$، قضیهٔ ما به نتیجهٔ

$$m(t) = E[\lambda(t - X_e)]E[X] \qquad (۱۳)$$

منجر می‌شود که همان قضیهٔ ۱.۱ در ایک و همکاران (۱۹۹۲) است.

همچنین قضیهٔ ما به اطلاعاتی دربارهٔ تقریبهای شتاب یکنواخت برای صف $M_t/G/\infty$ به دست می‌دهد. این تقریبها از یک سیستم صف‌بندی مفروض، با ساختن خانواده‌ای از سیستمهای صف‌بندی با اندیس ϵ به طوری که $\epsilon \uparrow 0$ به دست می‌آید. سیستم اندیس‌گذاری شده با ϵ دارای همان تابع نرخ ورود سیستم اولیه است بجز اینکه این نرخ بر ϵ تقسیم شده است که نرخ را، وقتی $\epsilon \uparrow 0$، افزایش می‌دهد یا شتاب می‌بخشد. به طور مشابه، مقیاس زمان سرویس نیز، بر ϵ تقسیم می‌شود، که نرخ سرویس را شتاب می‌بخشد.

این تکنیک، توسط مسی (۱۹۸۱ و ۱۹۸۵) برای تجزیه و تحلیل صف $M_t/M_t/1$ به کار رفت، که در آن یک بسط مجانبی برای احتمالهای انتقال، میانگین طول صف، و واریانس طول صف به دست آمده است. برای صف $M_t/G/\infty$ متوسط طول صف شتاب داده شده را می‌توان به شکل بستهٔ

$$m^{\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon}E\left[\int_{t-\epsilon X}^{t} \lambda(s)ds\right] \qquad (۱۴)$$

نوشت. درنتیجه، می‌توانیم تعمیم احتمالاتی قضیهٔ تیلور را برای به دست آوردن بسطی برحسب ϵ، با عبارت دقیقی برای جملهٔ باقیمانده به دست آوریم. اگر λ یک تابع $(n+1)$ بار مشتقپذیر باشد، آنگاه $m^{\epsilon}(t) = m_n^{\epsilon}(t) + r_n^{\epsilon}(t)$، که در آن

$$m_n^{\epsilon}(t) = \sum_{j=0}^{n}(-\epsilon)^j \frac{\lambda^j(t)}{(j+1)!}E[X^{j+1}] \qquad (۱۵)$$

و

$$r_n^{\epsilon}(t) = (-\epsilon)^{n+1}\frac{E[\lambda^{(n+1)}(t-\epsilon X_e^{(n+2)})]}{(n+2)!} \times E[X^{n+2}]. \qquad (۱۶)$$

به عنوان یک حالت خاص، جملهٔ مرتبهٔ صفر در بسط شتاب یکنواخت، معمولاً تقریب مانای نقطه به نقطه نامیده می‌شود؛ به عنوان مثال نگاه کنید به گرین و کولسار (۱۹۹۱) و ویت (۱۹۹۱). به علاوه، ما عبارت دقیقی برای خطای القا شده به وسیلهٔ این تقریب (برای سیستم اولیه، سیستم شتاب داده نشده یا $\epsilon = 1$) داریم

$$|m(t) - \lambda(t)E(X)| = \frac{1}{2}E[\lambda^{(1)}(t-X_e)]E[X^2]. \qquad (۱۷)$$

به علاوه، تمامی این نتایج به شبکه‌های صفهای با بینهایت سرویس دهنده بسط داده می‌شود؛ به قضیهٔ ۴-۵ مسی و ویت (۱۹۹۲) نگاه کنید.

این تقریب‌های مختلف برای میانگین وابسته به زمان $m(t)$ به اندازهٔ تقریبهای مستقیم اهمیت ندارند، زیرا $m(t)$ به آسانی با به کار بردن (۱۳) محاسبه می‌شود. در وهلهٔ اول، علاقه‌مندی ما به این تقریبها برای حصول درکی از تقریبهای متناظر است هنگامی که تنها تعداد محدودی سرویس‌دهنده وجود دارد، در این صورت، هیچ فرمول بسته صریحی در دسترس نیست.

مراجع

Abate, J. and W. Whitt (1988), The correlation functions of RBM and M/M/1. *Comm. Statist.-Stochastic Models* **4**, 315-359.

Athreya, K. B. and T. G. Kurtz (1973), A generalization of Dynkin's identity and some applications, *Ann. Probab.* **1**, 570-579.

Beek, P. van and J. Braat (1973), The limits of sequences of iterated overshoot distribution functions, *Stochastic Process. Appl.* **1**, 307-316.

Daley, D. J. and D. Vere-Jones (1988), *An Introduction to the Theory of Point Processes* (Speringer, New York).

Eick, S. G., W. A. Massey and W. Whitt (1992), The Physics of the $M_t/G/\infty$ queue, to appear in; *OPer. Res.*

Green. L. and P. Kolesar (1991), The Pointwise stationary approximation for queues with nonstationary arrivals, *Management Sci*, **37**, 84-97.

Harkness, W. L. and R. Shantaram (1969), Convergence of sequence of a transformations of distribution functions, *Pacific J. Math.* **31**, 403-415.

Massey, W. A. (1981), Nonstationary queues, Ph.D. dissertation, Dept. of Math., Stanford Univ. (Stanford, CA).

Massey, W. A. (1985), Asymptotic analysis of the time dependent $M/M/1$ queue, *Math. Oper. Res.* **10**, 305-327.

Massey, W. A. and W. Whitt (1992), Networks of infinite-server queues with nonstationary Poisson input, to appear in: *Queueing Syst.*

Royden, H. L. (1968), *Real Analysis* (Macmillan, London, 2nd ed.).

Rudin, W. (1964), *Principles of Mathematical Analysis* (Mc-Graw-Hill, New York, 2nd ed.).

Shantaram, R. and W. L. Harkness (1972), On a certain class of limit distributions, *Ann. Math. Statist.* **43**, 2067-2071.

Whitt, W. (1985), The renewal-process stationary-excess operator. *J. Appl. Probab.* **22**, 156-167.

Whitt, W. (1991), The pointwise stationary approximation for $M_t/M_t/s$ queues is asymptotically correct as the rates increase, *Management Sci*, **37**, 307-314.

Wolff, R. W. (1989), *Stochastic Modeling and the Theory of Queus* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ).