ساختن مثالهای نقض دربارهٔ استقلال

بروس . ر. جانسون بنجامین. ج. تیلی

ترجمهٔ بهروز بهرام*

چکیده
روش ساده‌ای برای اصلاح احتمال در به وجود آوردن مثالهای نقض مربوط به استقلال ارائه شده است. می‌توان از این روش برای ساختن مثالهای نقض برای مجموعه‌های متناهی از پیشامدها و برای دنباله‌های نامتناهی از پیشامدها استفاده کرد. نشان داده شده است که چگونه می‌توان مثالهایی از گردایه‌های شمارا از پیشامدها ساخت به طوری که همهٔ معادله‌ها در خانوادهٔ (شمارای) «دستورهای ضرب» که استقلال را تعریف می‌کنند، بجز برای یکی، یا به طور کلّی‌تر، بجز برای خانوادهٔ مشخص دلخواهی، صادق‌اند.

۱ مقدمه

پیشامدهای E_1، E_2، ...، E_n را پیشامدهای مستقل گویند هرگاه برای هر زیرمجموعهٔ $\{E_{i_1}, E_{i_2}, E_{i_k}\}$ از دو یا بیشتر از دو تا از پیشامدهای E داشته باشیم:

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1} P(E_{i_2}) \ldots P(E_{i_k}).$$

چون $2^n - n - 1$ معادله در این تعریف وجود دارد، کار بررسی استقلال، وقتی n بزرگ است، ممکن است کاری دشوار باشد. طبیعی است که دانشجویان در این اندیشه باشند که آیا زیرمجموعه‌ای مناسب از این معادله‌ها کفایت می‌کند یا خیر. به عنوان مثال، شاید استقلال دوبه‌دو، مستلزم استقلال باشد. صورتی از مثال نقض کلاسیک برنشتاین که نشان می‌دهد (استقلال دوبه‌دوی سه پیشامد مستلزم استقلال نیست، تقریباً در هر کتاب درسی دربارهٔ احتمال و آمار ریاضی ارائه شده است. کراو (۱۹۶۷) مثالی ارائه کرده است که استقلال سه‌به‌سه، مستلزم استقلال دوبه‌دو نیست. مثالهایی از n (≤ 3) پیشامد وابسته به طوری که هر $(n-1)$ تای آنها مستقل‌اند به وسیلهٔ وانگ (۱۹۷۲) داده شده است. کروسکی و بیکیس (۱۹۸۴) نشان دادند که مجموعه‌های غیربدیهی متناهی از پیشامدهای مستقل که فرسا باشند موجود نیستند. مثالهای نقضی که تمامی جنبه‌های ذکر شده در بالا را در بر می‌گیرند، به علاوهٔ موارد بیشتر، در مجموعه‌های رومانو و زیگل (۱۹۸۶) و استویانوف (۱۹۸۷) منظور شده‌اند. این مطلب که همه $2^n - n - 1$ دستور ضرب برای تعریف استقلال n پیشامد لازم است؛ به کمک یک مثال نقض در مقالهٔ رومانو و زیگل (۱۹۸۶)، که با ریچارد دارلی منسوب شده است، تایید شده است. در این مثال نقض، همه $2^n - n - 1$ دستور ضرب، بجز در مورد یک معادلهٔ مشخص دلخواه، صادق‌اند. وانگ و همکاران (۱۹۹۳) مثال مشابهی را ارائه کرده‌اند.

به جای نشان دادن مثالهای نقض مشخص، نظیر آنها که در بالا ذکر شدند، ما تلاش خود را روی فنّی برای ساختن متمرکز می‌کنیم. روش ما برای اصلاح ساختار احتمال را می‌توان برای ساختن مثالهایی به کار برد که در آن برای n پیشامد، همهٔ $2^n - n - 1$ دستور ضرب بجز برای یک زیرمجموعهٔ مشخص دلخواه از آنها صادق‌اند. به علاوه می‌توان آن را به

*) بهروز بهرام، دانشجوی رشتهٔ آمار، دانشگاه شهید بهشتی

حالتهایی از دنباله‌های نامتناهی پیشامدها، تعمیم داد. یعنی روش ساده‌ای را برای ساختن مثالهایی ارائه می‌کنیم که در آنها پیشامدهای $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ در همهٔ دستورهای ضرب به شکل

$$P(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\ldots\cap E_{i_k}) = P(E_{i_1})P(E_{i_2})\ldots P(E_{i_k})$$

بجز برای زیرمجموعه‌ای مشخص و دلخواه از این دستورهای ضرب صدق می‌کنند.

۲ روش اصلاح احتمال

دنباله‌ای از k پیشامد A_1، A_2، ...، A_k را در نظر بگیرید؛ و فرض کنید $\mathcal{A}$ نشان دهندهٔ خانوادهٔ 2^k-1 پیشامد به شکل $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_r}$ باشد که در آن $\{i_1, i_2,\ldots,i_r\}$ زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\{1,2,\ldots,k\}$ است. برای پیشامد مفروضی مانند B، فرض کنید $\mathcal{P}$ معرف خانوادهٔ 2^k پیشامد به شکل $A_1^{\delta_1}\cap A_2^{\delta_2}\cap\ldots\cap A_k^{\delta_k}\cap B$ باشد که در آن هر $A_j^{\delta_j}$ یا A_j یا A_j^c است. یعنی $\mathcal{P}$ افراز B است که توسط A_1، A_2، ...، A_k معین می‌شود. فرض کنید که هر عضو $\mathcal{P}$ دارای احتمالی مثبت در ساختار احتمال اولیه باشد. هدف این بخش ارائهٔ روشی برای اصلاح ساختار احتمال است به طوری که احتمال پیشامد $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k$ به مقدار مثبت متفاوتی تغییر یابد بدون اینکه احتمال هیچ دو عضو دیگری از $\mathcal{A}$ یا هیچ پیشامد مشمول در B^c تغییر یابد. سپس نشان خواهیم داد چگونه این روش را می‌توان برای ساختن مثالهای نقض استقلال گوناگون، به کار برد.

ما شیوهٔ اصلاح احتمال را با ثابت گرفتن عدد مثبت ε کوچکتر از

$$\min\{P(A_1^{\delta_1}\cap\ldots\cap A_k^{\delta_k}\cap B) : A_1^{\delta_1}\cap\ldots\cap A_k^{\delta_k}\cap B\in\mathcal{P}\}$$

آغاز می‌کنیم. حال، احتمال هر عضو در $\mathcal{P}$ را به ترتیب زیر، تغییر می‌دهیم. احتمال $A_1^{\delta_1}\cap\ldots\cap A_k^{\delta_k}\cap B$ را به اندازهٔ $(-1)^J\varepsilon$ تغییر می‌دهیم که در آن J تعداد پیشامدهای Aی مکمل گرفته شده در عبارت بالاست.

این اصلاحیه‌ها احتمالها را به طور معتبری تخصیص می‌دهند زیرا همهٔ احتمالهای تغییر یافته، مثبت باقی می‌مانند و تغییر خالص در مجموع احتمالها روی پیشامدهای (دوبه‌دو ناسازگاری) که $\mathcal{P}$ را تشکیل می‌دهند، برابر است با

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\varepsilon = (-1+1)^k\varepsilon = 0.$$

بدیهی است احتمال هیچ پیشامدی که در B^c مشمول است، تغییر نیافته است. همچنین وقتی احتمال اصلاح شده عضوی دلخواه مانند $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_r}$ در $\mathcal{A}$ را با بیان کردن آن به عنوان مجموع احتمالهای 2^{k-r} پیشامد $\mathcal{P}$ به علاوهٔ $P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_r}\cap B^c)$ امتحان می‌کنیم، پی می‌بریم که احتمال به شکل زیر تغییر یافته است

$$\sum_{j=0}^{k-r}\binom{k-r}{j}(-1)^j\varepsilon = \begin{cases}0 & r<k \quad \text{اگر}\\ \varepsilon & r=k \quad \text{اگر}\end{cases}$$

بنابراین احتمال $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k$ بدون تغییر هیچیک از احتمالهای پیشامد $\mathcal{A}$، به اندازهٔ ε افزایش یافته‌است.

۳ ساختن مثالهای نقض برای استقلال در مورد n پیشامد

برای نشان دادن اینکه تعریف استقلال n پیشامد متضمن 2^n-n-1 دستور ضرب را نمی‌توان ساده‌تر کرد، از روش اصلاحی خودمان برای ساختن مثالهای نقض مناسب استفاده می‌کنیم. با شروع از n پیشامد مستقل E_1، E_2، ...، E_n به طوری که برای $i=1,2,\ldots,n$، $0<P(E_i)<1$، می‌توانیم ساختار احتمال را طوری اصلاح کنیم که دقیقاً یک دستور ضرب دلخواه، برقرار نباشد. برای مثال فرض کنید معادله‌ای که باید برقرار نباشد، عبارت باشد از

$$P(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\ldots\cap E_{i_1}) = P(E_{i_1})P(E_{i_2})\ldots P(E_{i_k})$$

که در آن $2\le k\le n$ و $(i_1,\ldots,i_k,i_{k+1},\ldots,i_n)$ جایگشتی از $(1,2,\ldots,n)$ است. می‌توان به این مقصود با قرار دادن

$$A_1=E_{i_1}, A_2=E_{i_2},\ldots,A_k=E_{i_k}$$

$$B=\begin{cases} E^c_{i_{k+1}}\cap E^c_{i_{k+2}}\cap\ldots\cap E^c_{i_n}, & k<n \quad \text{اگر}\\ \text{فضای نمونه‌ای} & k=n \quad \text{اگر}\end{cases}$$

و به کار بردن روش اصلاح احتمال توضیح داده شده در بخش قبل، نایل شد. با مشاهدهٔ اینکه هر اشتراک از E پیشامد که عضوی از $\mathcal{A}$ نیست مشمول در B^c است، به سادگی دیده می‌شود که ساختار احتمال مورد نظر به دست آمده است.

توجه کنید که ساختار احتمال اصلاح شده، شرایط لازم را برای کاربرد مجدد روش اصلاح، حفظ می‌کند. از این رو از طریق اصلاحهای مکرر، می‌توان مثالهای نقضی دربارهٔ استقلال ساخت که در آن هر زیرمجموعه خاصی از دستورهای ضرب رد شوند در حالی که بقیه معتبر باقی بمانند.

ما این بخش را با به کار بردن شیوهٔ اصلاح برای ساختن مثالی که در آن استقلال E_1،E_2، E_3، E_4 تنها به این دلیل نقض می‌شود که $P(E_3 \cap E_4) \neq P(E_3).P(E_4)$، به پایان می‌بریم. با شروع از پیشامدهای مستقل E_1،E_2،E_3،E_4 به طوری که $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{2}$، قرار می‌دهیم $A_1 = E_2, A_2 = E_4, B = E_1^c \cap E_3^c$ و شیوهٔ اصلاح احتمال بخش ۲ را با ε کوچکتر از $\frac{1}{16}$ به کار می‌بریم. در این صورت

$$\begin{aligned}
P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4) &= P(A_1 \cap A_2 \cap B) \\
&= \frac{1}{16} + (-1)^0\varepsilon = \frac{1}{16} + \varepsilon \\
P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4) &= P(A_1^c \cap A_2 \cap B) \\
&= \frac{1}{16} + (-1)^1\varepsilon = \frac{1}{16} - \varepsilon \\
P(E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c \cap E_4^c) &= P(A_1 \cap A_2^c \cap B) \\
&= \frac{1}{16} + (-1)^1\varepsilon = \frac{1}{16} - \varepsilon \\
P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c \cap E_4^c) &= P(A_1^c \cap A_2^c \cap B) \\
&= \frac{1}{16} + (-1)^2\varepsilon = \frac{1}{16} + \varepsilon
\end{aligned}$$

و هر یک از ۱۲ پیشامد باقی مانده به شکل $E_1^{\delta_1} \cap E_2^{\delta_2} \cap E_3^{\delta_3} \cap E_4^{\delta_4}$، که در B^c مشمول هستند، احتمال تغییر نیافتهٔ $\frac{1}{16}$ را دارند. از ساختار احتمال اصلاح شده، نتیجهٔ $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{2}$ حاصل می‌شود و همهٔ $2^4 - 4 - 1$ دستور ضرب برقرارند بجز

$$P(E_3 \cap E_4) = \frac{1}{4} + \varepsilon \neq P(E_3)P(E_4).$$

۴ ساختن مثالهای نقض برای استقلال در مورد دنباله‌ای نامتناهی از پیشامدها

دنباله‌ای نامتناهی از پیشامدها بنابر تعریف مستقل‌اند هرگاه هر زیرمجموعهٔ متناهی از این پیشامدها مستقل باشند، بنابراین به تعدادی نامتناهی اما شمارا از دستورهای ضرب نیاز داریم. مجدداً شیوه اصلاح را می‌توان برای ساختن مثالهای نقض به کار برد که در آن یک دستور ضرب خاص و یا مجموعه‌ای از دستورهای ضرب نقض می‌شوند ولی بقیهٔ آنها برقرارند.

کار را با دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ شروع می‌کنیم که در آن برای هر i، $0 < P(E_i) < 1$، و $\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) < \infty$. برای هر n ، فرض کنید C_n معرف گردایهٔ 2^n پیشامد دوبه‌دو ناسازگار به شکل $E_1^{\delta_1} \cap E_2^{\delta_2} \cap \ldots \cap E_n^{\delta_n} \cap E_{n+1}^c \cap E_{n+2}^c \cap \ldots$ باشد که در آن هر $E_i^{\delta_i}$ یا E_i و یا E_i^c است. در این صورت $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ گردایه‌ای شمارا از پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار است. از لم بورل ـ کانتلی، می‌دانیم که $1 =$ (تنها تعدادی متناهی از پیشامدهای E رخ دهد)P یعنی مجموع احتمالها روی تمامی عضوهای مجزای C، برابر یک است. همچنین هر پیشامد در $\mathcal{C}$، احتمالی مثبت دارد. این مطلب را می‌توان با استفاده از استقلال و خاصیت پیوستگی احتمال مشاهده کرد و نوشت

$$P(E_1^{\delta_1} \cap \ldots \cap E_n^{\delta_n} \cap E_{n+1}^c \cap E_{n+2}^c \cap \ldots) =$$
$$\left(\prod_{i=1}^{n} P(E_i^{\delta_i})\right)\left(\prod_{j=1}^{m} P(E_{n+j}^c)\right) P\left(\bigcap_{j=m+1}^{\infty} E_{n+j}^c\right)$$

و سپس مشاهده کرد که وقتی m به قدر کافی بزرگ باشد، $P(\bigcap_{j=m+1}^{\infty} E_{n+j}^c)$ نزدیک ۱ است.

حال فرض کنید که دستور ضربی که باید نقض شود، عبارت است از

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1})P(E_{i_2})\ldots P(E_{i_k})$$

که در آن $k \geq 2$، i_1،i_2،...،i_k اعداد صحیح مثبت متمایز هستند. با فرض اینکه K نشان دهنده، کلیهٔ اعداد صحیح مثبت غیر از i_1،i_2،...،i_k باشد، نتیجهٔ مورد نظر با قرار دادن

$$A_1 = E_{i_1}, \quad A_2 = E_{i_2}, \ldots, A_k = E_{i_k}, \quad B = \bigcap_{i \in K} E_i^c$$

و به کار بردن روش اصلاح احتمال توضیح داده شده در بخش ۲، به دست می‌آید. چون هر اشتراک متناهی از پیشامدهای E که عضوی از $\mathcal{A}$ نیست مشمول در B^c است، مثال نقضی که خاصیتهای مورد نظر را دارا باشد، به دست می‌آید. همچنین این ساختار احتمال اصلاح شده در شرایط لازم صدق می‌کند که اجازه تکرار اصلاح را بدهد؛ و از طریق تکرارهای پی‌درپی می‌توانیم مثالهای نقضی در مورد استقلال بسازیم که در آن هر زیرمجموعهٔ متناهی از دستورهای ضرب نقض شوند در حالی که بقیه، اعتبار خود را حفظ می‌کنند.

برای نقض کردن مجموعهٔ خاص شمارایی از دستورهای ضرب، حدگیری می‌کنیم، در حالی که E ها را طوری انتخاب کرده‌ایم که مجموع قدرمطلقهای کلیهٔ تغییرات انفرادی، مطلقاً همگرا باشد (به ویژه کافی خواهد بود که مجموع قدرمطلقهای کلیهٔ تغییرات برای n امین گام اصلاح، کمتر از 2^{-n} باشد). در این صورت این تضمین به وجود می‌آید که در حد، همه احتمالهای پیشامدهای C ، خوشتعریف باقی می‌مانند، و مجموع احتمالها روی تمامی

عضوهای (مجزای) C، برابر یک باقی می‌مانند. علاوه بر آن، هر یک از دستورهای ضرب که آنها را نقض می‌کنیم، در حد نیز نقض می‌شوند و بقیهٔ معتبر باقی می‌مانند.

برای مثال، ما یک ساختار احتمالی خواهیم ساخت که در آن دستورهای ضرب دوتایی نقض می‌شوند، در حالی که بقیه برقرارند. دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل $\{E_۱, E_۲, \dots\}$ را در نظر بگیرید که در آن $P(E_i) = ۲^{-i}$. فرض کنید $\{\{i_۱, j_۱\}, \{i_۲, j_۲\}, \dots\}$ شمارشی از همهٔ مجموعه‌های دو عضوی اعداد صحیح مثبت باشند. به صورت بازگشتی، روش اصلاح احتمال بخش ۲ را به کار بگیرید به طوری که در nامین مرحله قرار می‌دهید $B = \bigcap_{i\in k_n} E_i^c$ و $A_۱ = E_{i_n}$ و $A_۲ = E_{j_n}$ که در آن k_n مجموعهٔ کلیهٔ اعداد صحیح مثبت به غیر از i_n و j_nاند و انتخاب ε_n در این محدودیت اضافی که کوچکتر از $(\frac{۱}{۴})۲^{-n}$ باشد، صدق می‌کند. برای کمک به آشکار شدن موفقیت این شیوهٔ تکرار، فرض کنید $\{D_۱, D_۲, \dots\}$ شمارشی از عضوهای C باشد، و فرض کنید p_i نشان دهندهٔ احتمال اولیهٔ D_i و $a_{i,n}$ معرف مقداری باشد که احتمال D_i در nامین مرحله اصلاح، تغییر یافته است. در این صورت برای هر n، دو تا از جمله‌های $a_{i,n}$، برابر $+\varepsilon_n$ و دو تا $-\varepsilon_n$ هستند و بقیه صفرند. در حد تنها دستورهای ضرب دوتایی، نقض می‌شوند و احتمال حدی D_i عبارت است از

$$r_i = p_i + \sum_{n=۱}^{\infty} a_{i,n}$$

(نامنفی است زیرا تمامی مجموعه‌های جزئی مثبت هستند) و

$$\sum_{i=۱}^{\infty} r_i = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty}(\varepsilon_n + \varepsilon_n - \varepsilon_n - \varepsilon_n) = ۱$$

(تعویض ترتیب مجموعیابی مجاز است زیرا

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\sum_{i=۱}^{\infty}|a_{i,n}| = ۴\sum_{n=۱}^{\infty}\varepsilon_n < \infty).$$

مراجع

Ash, R. B. (1970). *Basic Probability Theory*, New York: John Wiley.

Crow, E. L. (1967), "A Counterexample on Independent Events," *American Mathematical Monthly*, 74, 716-717.

Feller, W. (1968), *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (Vol. 1, 3rd. ed.), New York: John Wiley.

Krewski, D., and Bickis, M. (1984), "A Note on Independent and Exhaustive Events," *The American Statistician*, 38, 290-291.

Larsen, R. J., and Marx, M. L. (1985), *An Introduction to Probability and Its Applications*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Parzen, E. (1960), *Modern Probability Theory and Its Applications*, New York: John Wiley.

Romano, J. P., and Siegel, A. F. (1986), *Counterexamples in Probability and Statistics*, Monterey, CA: Wadsworth & Brooks/Cole.

Ross, S. (1988). *A First Course in Probability* (3rd ed.), New York: Macmillan.

Stoyanov, J. M. (1987), *Counterexamples in Probability*, New York: John Wiley.

Wang, Y. H., Stoyanov, J., and Shao, Q. M. (1993), "On Independence and Dependence Properties of a Set of Random Events," *The American Statistician*, 47, 112-115.

Wong, C. K. (1972), "A Note on Mutually Independent Events," *The American Statistician*, 26, 27-28.

اصل این مقاله با عنوان On the Construction of Independence Counterexamples

در The American Statistician, Feb. 1996, Vol. 50, No. 1 چاپ شده است.