



## طرح آزمایش و تحلیل رگرسیونی در شبیه سازی

جک کلایجن و چارلز استندریج

ترجمه و اقتباس

غلامحسین شاهکار\* و حامد رضا طارقیان†

### چکیده

در یک سیستم خاص تولیدی انعطاف پذیر، ترکیب ماشینها، یعنی تعداد ماشینهایی که یکی از سه کار مورد نظر را انجام می دهند و همچنین تعداد ماشینهایی که قابلیت انجام هر یک از آن سه کار را دارند (ماشینهای انعطاف پذیر)، ورودی شبیه سازی یک سیستم خاص انعطاف پذیرند. یک ترکیب شهودی از این چهار ماشین با طرح عاملی کسری  $2^{4-1}$  مقایسه می شود. خروجی شبیه سازی سیستم تولیدی مفروض از طریق دو مدل متفاوت رگرسیونی تحلیل می شود. اعتبار این مدلها تأیید می شود. مدل رگرسیونی با دو ورودی شامل اثر متقابل آنها، پیشگوییهای معتبر و مدلل دارد.

### مقدمه

شبیه سازی تکنیکی است که در بسیاری زمینه ها به دلیل انعطاف پذیری، سادگی و واقعی بودنش به کار می رود. اما چون مبتنی بر انجام آزمایش (با سیستم واقعی) است، لذا نیازمند طرح و تحلیل آماری است مطالب مورد بحث در مقاله حاضر، بر نکات استراتژیک در اجرای شبیه سازی تأکید دارد، یعنی آنکه کدام یک از صورتهای مدل شبیه سازی باید اجرا شوند (ترکیب مقادیر پارامترهای ورودی)، و چگونه باید به تحلیل آماری خروجی حاصل پرداخت. هر چند نکات تاکتیکی (مانند طول اجرا و بازه های اطمینان) تنها در شبیه سازی سیستمهای احتمالی مطرح اند، اما نکات استراتژیک هم در شبیه سازی سیستمهای غیراحتمالی و هم در سیستمهای احتمالی پیش می آیند. هدف مقاله حاضر مطالعه مدل شبیه سازی غیراحتمالی یک سیستم تولیدی انعطاف پذیر است.

### سیستم تولیدی انعطاف پذیر

شکل ۱ یک طرح ممکن برای سیستم تولیدی انعطاف پذیر را نشان می دهد که به وسیله ورتمن<sup>۱</sup> و ویلسن<sup>۲</sup> مطالعه شده است [۲]. در این طرح نوار نقاله ای جهت انتقال قطعات بین ماشینها و ماشین شستشو تعبیه شده است. قطعات قبل از انجام هر کار و پس از انجام آخرین کار شسته می شوند. آنها از طریق یک ماشین تراش وارد و از طریق یک ایستگاه بازرسی خارج می شوند. سه نوع کار با گدهای ۱۰، ۲۰ و ۳۰ توسط ماشینها انجام می شوند. پنج ماشین جهت انجام کار ۱۰، دو ماشین جهت انجام کار ۲۰، دو ماشین جهت انجام کار ۳۰ و یک ماشین انعطاف پذیر جهت انجام هر یک از سه کار ۱۰، ۲۰ یا ۳۰ در نظر گرفته شده اند.

### حدود مسأله

در این مطالعه ترکیب ماشینها، یعنی تعداد ماشینهایی که هر یک از کارهای خاص را انجام می دهند و همچنین تعداد ماشینهای انعطاف پذیر که قادر به انجام هر سه کار هستند تعیین می شود. فرض کنید:

$x_1$ : تعداد ماشینهایی که کار ۱۰ را انجام می دهند.

$x_2$ : تعداد ماشینهایی که کار ۲۰ را انجام می دهند.

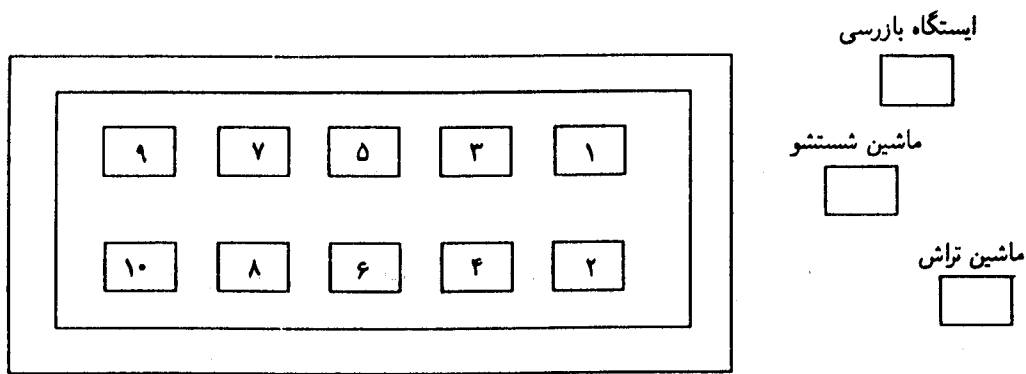
$x_3$ : تعداد ماشینهایی که کار ۳۰ را انجام می دهند.

$x_4$ : تعداد ماشینهای انعطاف پذیر برای انجام کارهای ۱۰، ۲۰ یا ۳۰.

ترکیب ماشینها (یعنی مقادیر  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ) باید قابلیت پردازش حداقل ۳۱۴۰ قطعه در هفته را داشته باشد. مسأله تحت بررسی منحصر

1) Wortman 2) Wilson

\* دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد † دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد



وضعیت ماشینها

کار ۳۰  کار ۲۰  کار ۱۰  بیکار

شکل ۱ طرح استقرار یک سیستم تولیدی انعطاف‌پذیر

## طرح آزمایش

با توجه به دامنه تغییر متغیرها، می‌بینیم که در این مسأله لازم است تا ۲۴ ترکیب مختلف را شبیه‌سازی کنیم. در بسیاری از مطالعات شبیه‌سازی تعداد این قبیل ترکیبها خیلی بیشتر است. چگونه می‌توان تنها با در نظر گرفتن کسری از کلیه ترکیبهای ممکن به جواب قابل قبول رسید؟ به این سؤال در بخشهای بعد پاسخ می‌گوییم.

جدول ۱ گزینه ترکیبهای ورودی برای شبیه‌سازی را نشان می‌دهد که به طور شهودی و بدون توجه به نظریه آماری طرح آزمایشها ارائه شده‌اند.

جدول ۱ طرح شهودی

شماره اجرا	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
(۱) (کار ۱۰)(کار ۲۰)(کار ۳۰) (انعطاف‌پذیر) $x_7$	-	-	-	-
۲	+	-	+	M
۳	-	+	+	M
۴	+	+	-	-
۵	-	-	+	+
۶	+	-	-	M
۷	-	+	-	M
۸	+	+	+	+

توضیح: حداقل مقادیر  $x_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) را با -،

و حداکثر مقادیر آن را با + و مقدار میانی  $x_7$  را

با  $M$  نشان داده‌ایم ( $x_7 = 1$ ).

نظریه رسمی طرحهای  $2^k$  حاکی از آن است که هر «عامل» (متغیر مستقل  $x_j$  به طوری که  $j = 1, 2, 3, 4$ ) تنها در دو سطح (مقدار) مورد مطالعه قرار می‌گیرد. (در مسأله مورد بحث، عاملها دامنه بسیار محدودی

کنترل منطقی یک سیستم انعطاف‌پذیر است، که تنها یک نوع قطعه را پردازش می‌کند.

با یک حساب سرانگشتی ترکیب ماشینها به صورت زیر تعیین می‌شود. قید مربوط به قابلیت پردازش ۳۱۴۰ قطعه در هفته به معنای آن است که در هر دقیقه باید کسر ۰٫۷۳ قطعه پردازش شود. می‌دانیم که انجام کارهای ۱۰، ۲۰ و ۳۰ به ترتیب برای هر قطعه ۰٫۷۵، ۰٫۷۵ و ۰٫۷۵ دقیقه زمان لازم دارد. بنابراین ترکیب محاسبه شده برای ماشینها عبارت خواهد بود از  $x_1 = 5/4$  و  $x_2 = 1/8$  و  $x_3 = 2/5$ .

در صورتی که مقادیر محاسبه شده را به بالا گرد کنیم به مقادیر  $x_1 = 6$ ،  $x_2 = 2$  و  $x_3 = 3$  می‌رسیم. چنین ترکیبی باعث ایجاد ظرفیت اضافی برای هر نوع ماشین شده، و بنابراین نیازی به ماشین انعطاف‌پذیر نیست یعنی  $x_4 = 0$ . از طرف دیگر چنانچه نتایج حاصل را به پایین گرد کنیم، داریم  $x_1 = 5$ ،  $x_2 = 1$  و  $x_3 = 2$ . در اینجا لازم است تا ظرفیت ماشین انعطاف‌پذیر  $1/7 = 0/5 + 0/8 + 0/4$  باشد، بنابراین  $x_4 = 2$ . ماشینهای انعطاف‌پذیر نسبت به ماشینهای که تنها یک نوع کار را انجام می‌دهند گرانترند. از این رو نیازی به در نظر گرفتن ماشینهای انعطاف‌پذیر به جای ماشینهای معمولی نیست. یعنی چنانچه در اینجا هزینه استقرار و راه‌اندازی یک ماشین انعطاف‌پذیر بیشتر از یک و نیم برابر هزینه استقرار و راه‌اندازی یک ماشین معمولی باشد، آن‌گاه نیازی به در نظر گرفتن ماشین انعطاف‌پذیر نیست.

با توجه به راه حل ساده فوق دامنه تغییرات مقادیر ورودی به سیستم شبیه‌سازی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} 5 &\leq x_1 \leq 6, \\ 1 &\leq x_2 \leq 2, \\ 2 &\leq x_3 \leq 3, \\ 0 &\leq x_4 \leq 2, \end{aligned} \quad (1)$$

دارند و سطوح نیز باید اعداد صحیح باشند. بنابراین این دو سطح با

$a = 0.3$  نشان می‌دهد.

راه فشرده‌تر برای ارزیابی تأثیر حذف یک اجرا، توجه به پیشگوی  $y$  است، یعنی وقتی معیار ارزیابی را به جای پاسخ، پیشگو در نظر بگیریم. جدول ۵ خطای نسبی پیشگو

$$r_i = \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}, \quad i = 1, \dots, 8 \quad (7)$$

یا اعتبار تقاطعی را نشان می‌دهد، که در آن  $\hat{y}_i$  پاسخ پیش‌بینی شده بر اساس معادله (۲) اما با برآورد اثرهای  $\beta_j$  با استفاده از تنها ۱ -  $n$  اجرا است، یعنی پس از حذف  $i$  امین اجرا از داده‌های شبیه‌سازی شده.

جدول ۴ پایداری  $\beta$  های معنی دار در صورت حذف یک اجرا

$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
اجرای حذف شده (کار ۱۰) (کار ۲۰) (کار ۳۰) (انعطاف‌پذیر) (ثابت)				
۱	۵۵۷	۵۵۷	۵۷۷	
۲	۷۱۲	۵۰۰	۲۰۳۲	
۳	۶۴۰	۷۰۰		
۴	۶۲۹	۶۹۲		
۵	۶۵۸	۱۹۶۲		
۶	۷۳۶			
۷	۵۳۶			
۸	۵۴۱	۳۲۸۸		
هیچکدام				

خطاهای جدول ۵ و ناپایداریهای جدول ۴ به قدری بزرگ هستند که مدل رگرسیونی جمعی، معادله (۲) رد می‌شود، و لزوم در نظر گرفتن یک فرامدل جدید (با استفاده از داده‌های قبلی شبیه‌سازی) را ایجاب می‌کنند.

جدول ۵ اعتبار تقاطعی مدل  $y_i - \hat{y}_i / y_i$

اجرای حذف شده (کار ۱۰) (کار ۲۰) (کار ۳۰) (انعطاف‌پذیر) (ثابت)	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
خطای نسبی (%)	-۳۵	-۳۸	۳۳	۱۳	-۱۸	-۱۹	۲۷	۱۰

## فرامدل دیگر

جدول ۴ نشان می‌دهد که عوامل  $x_1$  و  $x_2$  مهم نیستند. بنابراین یک مدل رگرسیونی برحسب عوامل دیگر  $(x_2, x_2)$  که شامل اثر متقابل این دو عامل نیز باشد، در نظر می‌گیریم:

$$\hat{y} = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 x_1 + \hat{\gamma}_2 x_2 + \hat{\gamma}_3 x_2^2 + \hat{\gamma}_4 x_1 x_2 \quad (8)$$

به موجب این مدل جدول ۴ به جدول ۶ تبدیل می‌شود، و همان طور که می‌بینیم در مدل جدید کلیه برآوردها با حذف اجرای  $i$ ،  $(i = 1, \dots, 8)$  معنی دار باقی می‌مانند.

جدول ۶ پایداری  $\hat{\gamma}$  های معنی دار با حذف یک اجرا

$\hat{\gamma}_0$	$\hat{\gamma}_{1,2}$	$\hat{\gamma}_2$	$\hat{\gamma}_3$	
۷۷۶	-۴۹۲	۱۳۶۴	۹۵۲	۱
۷۷۶	-۴۶۰	۱۳۰۰	۹۵۲	۲
۷۷۶	-۴۶۸	۱۳۲۴	۹۵۲	۳
۷۷۶	-۴۸۲	۱۳۴۰	۹۵۲	۴
۵۷۶	-۵۷۶	۱۴۳۲	۱۱۵۲	۵
۹۷۶	-۳۷۶	۱۲۳۲	۷۵۲	۶
۷۷۶	-۴۷۶	۱۳۳۲	۹۵۲	۷
۷۷۶	-۴۷۶	۱۳۳۲	۹۵۲	۸
هیچکدام				

با در نظر گرفتن مدل جدید، جدول ۵ به جدول ۷ تبدیل می‌گردد. همان طور که ملاحظه می‌شود خطاهای نسبی پیشگو در اینجا به مراتب کوچکتر شده‌اند.

جدول ۷ اعتبار تقاطعی معادله ۸

اجرای حذف شده	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
خطای نسبی (%)	۲	۲	-۱	۱	-۱۶	۱۴	۰	۰

جدول ۸ بررسی مضاعف معادله (۸)

$r$ (%)	$\hat{y}$	$y$	$x_1 x_2$	$x_1$	$x_2$
(کار ۲۰) (انعطاف‌پذیر) (اثر متقابل) (خروجی) (پیش‌گو) (خطا)					
۳	۳۰۶۰	۱۳۶۸	۲	۱	۲
۲۵	۲۵۸۴	۳۴۵۶	۱	۱	۱
۱۰	۳۰۶۰	۳۴۰۸	۲	۱	۲
۱۱	۲۵۸۴	۲۸۹۶	۱	۱	۱

در مسأله مورد بررسی می‌توان به دلیل هر اختیار داشتن داده‌های شبیه‌سازی برای بعضی ترکیبهای اضافی ورودی (به غیر از ۸ اجرای جدول ۲)، یعنی آنهایی که در جدول ۱ آمده ولی در جدول ۲ نیامده‌اند اعتبار مدل را مجدداً مورد ارزیابی قرار داد. از چهار ترکیب جدول ۸ که در برآوردن معادله ۸ مورد استفاده قرار نگرفته‌اند، برای بررسی مجدد قابلیت پیش‌بینی فرامدل رگرسیونی استفاده می‌کنیم.

بنابراین فرامدل عبارت است از:

$$\hat{y} = 776 + 952x_1 + 1332x_2 - 476x_1x_2.$$

این مدل حاکی از آن است که:

- (۱) ماشینهایی که کار ۲۰ را انجام می‌دهند و همچنین ماشینهای انعطاف‌پذیر گلوگاههای این سیستم تولیدی‌اند.

استفاده ساده‌اند. در ابتدای همین کار تحقیقاتی مدل شبیه‌سازی سیستم آماده بود و طی تنها چند روز نتایج ارائه شده در این مقاله (طرح و تحلیل) به دست آمدند. روشهای آماری به خودی خود هدف نیستند. بلکه می‌توانند نقاط ضعف تکنیکهای تجربی از جمله شبیه‌سازی را کاهش دهند. تازه در انتهای این کار تحقیقاتی ورتمن و ویلسن با استفاده از فرامدل (۸)، توانستند درک بهتری از عملکرد سیستمهای انعطاف‌پذیر به دست آورند.

(۲) همان‌طور که از ضریب منفی در جمله اثر متقابل بر می‌آید در استفاده از تعداد ماشینهایی که کار ۲۰ را انجام می‌دهند و تعداد بیشتر ماشینهای انعطاف‌پذیر مبادله وجود دارد.

## نتیجه‌گیری

مثال مورد بحث نشان می‌دهد که چگونه طرح آزمایش و تحلیل رگرسیونی در ارزیابی سیستمهای تولیدی انعطاف‌پذیر کاربرد دارند. روشهای آماری مورد

## مراجع

- [1] Kleijnen, J. P. C. (1987), *Statistical Tools for Simulation Practitioners*, Marcel Dekker, New York.
- [2] Wortman, David B., and James R. Wilson, "Optimizing a manufacturing plant by computer simulation", *Computer Aided Engineering*, September, 1984.

اصل مقاله با عنوان

**Experimental design and regression analysis in simulation: An FMS case study**

تألیف **Jack P. C. Kleijnen & Charles R. Standridge**

در **European Journal of Operational Research 33 (1988) 257-261**

به چاپ رسیده است.