آزمون نسبت درستنمایی
و
نابرابریهای بین میانگینهای حسابی ، هندسی و همساز

احمد پارسیان*

مقدمه

اغلب خوانندگان با آزمون نسبت درستنمایی آشنا هستند. می‌خواهیم با استفاده از این آزمون، نابرابریهای موجود بین میانگینهای حسابی، هندسی، و همساز را ثابت کنیم.

نابرابری بین میانگینهای حسابی و هندسی

فرض کنید $Y_1, \dots, Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیعهای نمایی به ترتیب با چگالیهای

$$f(y_i)=\lambda_i e^{-\lambda_i y_i},\quad i=1,2,\dots,n,\quad y_i>0,\quad \lambda_i>0$$

باشند. در آزمون فرض

$$H_0:\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$$

در برابر این فرض مقابل که لااقل یک زوج از مقادیر λ_i با هم نابرابرند، می‌توان به سادگی تحقیق کرد که آمارهٔ آزمون نسبت درستنمایی، λ، برابر است با

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{L(\hat\lambda,\dots,\hat\lambda)}{L(\hat\lambda_1,\dots,\hat\lambda_n)}\\ &= \frac{(\bar{Y})^{-n}e^{-n}}{\left(\prod_{i=1}^{n} Y_i\right)^{-1}e^{-n}}\\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n} Y_i}{(\bar{Y})^{n}}\end{aligned}$$

امّا با توجه به اینکه می‌دانیم $\lambda \le 1$ معلوم می‌شود که

$$\bar{Y} > \left(\prod_{i=1}^{n} Y_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

*) دکتر احمد پارسیان، دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

نابرابری میانگینهای هندسی و همساز

می‌دانیم که نابرابری میانگینهای هندسی و همساز از جایگذاری Y_i با $\frac{1}{Y_i}$ در نابرابری به‌دست آمده برای میانگینهای حسابی و هندسی حاصل می‌شود. بنابراین در به کارگیری خاصیت آزمونهای نسبت درستنمایی. فرض کنید $X_i=\frac{1}{Y_i}$، $i=1,\dots,n$، و $Y_i\sim E(\lambda_i)$، در این صورت X_i دارای تابع چگالی احتمال زیر است

$$f_{X_i}(x_i)=\frac{\lambda_i}{x_i^{2}}e^{-\lambda_i/x_i},\quad x_i>0,\quad \lambda_i>0\quad i=1,\dots,n$$

برای آزمون مجدد فرضهای آماری ذکر شده بر پایهٔ $X_1,\dots,X_n$، به سادگی معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\left\{n/\sum \frac{1}{X_i}\right\}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{2}\right)^{-1}e^{-n}}{\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{2}\right)^{-1}e^{-n}}\\ &= \frac{\left\{n/\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}\right\}}{\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)}\end{aligned}$$

حال با توجه به $\lambda \le 1$، نتیجه می‌شود که

$$\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}} \ge \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}.$$

مراجع

[1] Stefanski, L. A. *The American Statistician*, No. 3, Vol. 50, 1996.