پلی بین فرایندهای ایستا و ناایستا: دنباله‌های زمانی با همبستگی متناوب

زهره شیشه‌بر[۱]

چکیده

در این مقاله ابتدا یک ردهٔ خاص از فرایندهای ناایستا معرفی شده، سپس نشان داده می‌شود با بهره‌گیری از ارتباط بین آنها و فرایندهای ایستا، چگونه می‌توان از قوانین شناخته شدهٔ فرایندهای ایستا برای این رده استفاده کرد.

واژه های کلیدی : اتورگرسیو- میانگین متحرک ، فضای برداری ، ضرب داخلی ، دنباله‌های زمانی با همبستگی متناوب.

۱. مقدمه

رده‌ای از فرایندهای ناایستا، دنباله‌های زمانی با همبستگی متناوب، می‌باشند. این فرایندها اولین بار توسط گلادیشف[۲] در سال ۱۹۶۱ مورد مطالعهٔ جدی قرار گرفت [۲] و از آن پس، مقالات زیادی در مورد آنها نوشته شده است. هرد[۳] این رده را پلی بین فرایندهای ایستا و ناایستا نام نهاده است[۳]. در سالهای اخیر، این بحث مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. قبل از مطرح کردن موضوع اصلی، لازم است مروری بر تعاریف شناخته شده داشته باشیم .

تعریف ۱ـ فرض کنید V یک فضای برداری روی اعداد حقیقی باشد. یک ضرب داخلی روی V ، یک تابع است که به هر زوج مرتب (α,β)، عدد حقیقی $<\alpha.\beta>$ را نسبت می دهد به طوری که برای هر α ، β و γ در V و هر عدد حقیقی c داشته باشیم:

۱) $<\alpha+\beta.\gamma> = <\alpha.\gamma> + <\beta.\gamma>$

۲) $<c\alpha.\beta> = c<\alpha.\beta>$

۳) $<\alpha.\beta> = <\beta.\alpha>$

۴) $<\alpha.\alpha> \geq 0$ و $<\alpha.\alpha> = 0$ اگر و تنها اگر $\alpha = 0$.

(در این مقاله، امید ریاضی همهٔ متغیرهای تصادفی صفر فرض می‌شود). مجموعهٔ متغیرهای تصادفی همراه با ضرب داخلی

$$(X,X) \to <X.X>$$

را در نظر بگیرید . اندازهٔ یک متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف کرده:

$$\|X\|^2 = <X.X>$$

و مجموعهٔ فوق را همراه با نقاط حدی آن، $\mathcal{A}$ بنامید.

تعریف ۲ـ دنبالهٔ $\{X_n\}_{n\in Z}$، $X_n \in \mathcal{A}$، همراه با ضرب

---

۱ بخش آمار، دانشگاه شیراز

۲ Gladyshev

۳ Hurd

داخلی $<\cdots>$ را ایستای ضعیف گوئیم، هرگاه

$$<X_n.X_m>=<X_{n+1}.X_{m+1}>$$
$$\|X_n\|<\infty; m,n\in\mathbb{Z}$$

($\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح است).

در این مقاله، $\mathcal{A}$ همراه با ضرب داخلی

$$<X_n.X_m>=\operatorname{cov}(X_n,X_m)$$

در نظر گرفته می‌شود. بنابراین تعریف ۲ منجر به تعریف ایستای ضعیف در کتابهای معمولی سریهای زمانی خواهد شد.

۲. دنباله های زمانی با همبستگی متناوب

اکنون دنباله‌های زمانی با همبستگی متناوب را معرفی می کنیم.

تعریف ۳ـ دنبالهٔ $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$، $X_n\in\mathcal{A}$، را یک دنباله با همبستگی متناوب گوئیم، هرگاه

$$E(X_nX_m)=E(X_{n+T}X_{m+T}); n,m\in\mathbb{Z} \qquad (1)$$

وقتی که T یک عدد صحیح و مثبت باشد. کوچکترین $T>0$ که در رابطهٔ (۱) صدق کند، را تناوب دنباله گوئیم.

مطالعهٔ دنباله‌های زمانی با همبستگی متناوب اهمیتی خاص دارد. قضیه‌های ۱ و ۲ که در ذیل آمده‌اند، ارتباط این دنباله‌های ناایستا را با دنباله‌های ایستا مشخص می‌کنند. با استفاده از آنها می‌توان قضایای شناخته شدهٔ مربوط به دنباله‌های ایستا را به دنباله‌های ناایستا مرتبط کرد. ابتدا به لم زیر توجه کنید.

لم ۱ـ مجموعهٔ بردارهای تصادفی k تایی را در نظر بگیرید. تابعی که به هر جفت (Z_n,Z_m)، اثر ماتریس کوواریانس آنها را نسبت دهد، یک ضرب داخلی روی مجموعه بالا است (Z_s یک بردار تصادفی $k\times 1$ است). در واقع ضرب داخلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(Z_n,Z_m)\to<<Z_n,Z_m>>$$
$$<<Z_n,Z_m>>=trace\quad K_{n,m} \qquad (2)$$
$$K_{n,m}=E(Z_nZ'_m)$$

(بردار Z'_m ترانهاده بردار Z_m است).

اثبات: تحقیق روابط ۴-۱ در تعریف ۱ برای $<<\cdots>>$ ساده است.

قضیهٔ ۱ـ دنبالهٔ $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$، $X_n\in\mathcal{A}$، یک دنباله با همبستگی متناوب است اگر و تنها اگر $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$، به صورت

$$Z_n=(X_n,X_{n+1},\ldots,X_{n+T-1})'$$

یک دنبالهٔ ایستا با ضرب داخلی تعریف شده در لم ۱ باشد[٤].

اثبات: فرض کنید $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک دنباله با همبستگی متناوب باشد، آنگاه برای هر m و n در $\mathbb{Z}$ داریم:

$$\begin{aligned}<<Z_m,Z_n>> &=\sum_{j=0}^{T-1}E(X_{m+j}X_{n+j})\\ &=E(X_mX_n)+\sum_{j=1}^{T-1}E(X_{m+j}X_{n+j})\\ &=E(X_{m+T}X_{n+T})+\sum_{j=1}^{T-1}E(X_{m+j}X_{n+j})\\ &=\sum_{j=1}^{T}E(X_{m+j}X_{n+j})\\ &=\sum_{j=0}^{T-1}E(X_{m+1+j}X_{n+1+j})\\ &=<<Z_{m+1},Z_{n+1}>>\end{aligned}$$

که نشان می دهد $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک دنبالهٔ ایستاست. برعکس فرض کنید $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک دنبالهٔ ایستاست. بنابراین برای هر n و m در $\mathbb{Z}$:

$$<<Z_m,Z_n>>=<<Z_{m+1},Z_{n+1}>>$$

یا

$$\sum_{j=0}^{T-1}E(X_{m+j}X_{n+j})=\sum_{j=0}^{T-1}E(X_{m+1+j}X_{n+1+j})$$

یا

$$E(X_nX_m)=E(X_{n+T}X_{m+T})$$

که نشان می دهد $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک دنباله با همبستگی متناوب با تناوب T است [۲].

قضیهٔ ۲ـ دنبالهٔ $\{X_n\}_{n\in Z}$، $X_n\in\mathcal{A}$، یک دنباله با همبستگی متناوب با تناوب T است، اگر و تنها اگر دنبالهٔ $\{Y_n\}_{n\in Z}$ به طوری که

$$Y_n=(X_{nT},X_{nT+1},\ldots,X_{nT+T-1})' \qquad (3)$$

یک دنبالهٔ ایستا باشد، یعنی

$$. E(Y_nY'_m) = E(Y_{n+1}Y'_{m+1})$$

اثبات: تحقیق این حکم ساده است [۲].

مثال: دنبالهٔ $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ که با روابط زیر تعریف می‌شود یک دنباله با همبستگی متناوب است:

$$X_t = a_t X_{t-1} + \xi_t ; t = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots \quad , \xi_t \sim N(0,\sigma_t^2)$$

$$a_t = \begin{cases} 0.2 & \text{زوج؛ } t \\ 0.5 & \text{فرد؛ } t \end{cases} \quad \text{و} \quad \sigma_t^2 = \begin{cases} 0.4 & \text{زوج؛ } t \\ 0.6 & \text{فرد؛ } t \end{cases}$$

به سادگی می توان نشان داد دنباله $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$،

$$Y_t = \begin{pmatrix} X_{2t} \\ X_{2t+1} \end{pmatrix}$$

یک دنبالهٔ ایستای دو متغیره است.

به عنوان کاربرد قضیهٔ بالا، بوشناکف[4] نشان داد چگونه یک مدل اتورگرسیو- میانگین متحرک متناوب می‌تواند به یک مدل اتورگرسیو- میانگین متحرک ایستای چند متغیره نسبت داده شود[۱].

فرض کنید $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$، $X_n \in \mathcal{A}$، یک دنباله با همبستگی متناوب با تناوب T باشد و در رابطهٔ زیر صدق کند:

$$X_n = \sum_{i=1}^{p} \phi_{n,i} X_{n-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_{n,i}\xi_{n-i} + \xi_n \qquad (4)$$

وقتی $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک اغتشاش متناوب با تناوب T باشد و

$$. Var(\xi_n) = Var(\xi_{n+T})$$

دنباله‌های چند متغیرهٔ $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ و $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ را بر اساس دنباله‌های $\{X_n\}_{n\in z}$ و $\{\eta_n\}_{n\in z}$ و رابطهٔ (۳) تعریف کنید. رابطه ٤ را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$UY_n = A_1 Y_{n-1} + \ldots + A_k Y_{n-k} + V\eta_n + B_1\eta_{n-1} + \ldots + B_l \eta_{n-l} \qquad (5)$$

وقتی که $l = [\frac{q}{T}] + 1$ و $k = [\frac{p}{T}] + 1$ و

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -\phi_{T,1} & -\phi_{T,2} & \cdots & -\phi_{T,T} \\ 0 & 1 & -\phi_{T-1,1} & \cdots & -\phi_{T-1,T-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -\phi_{T-2,T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

و

$$A_i = \begin{bmatrix} \phi_{T,iT} & \cdots & \phi_{T,iT+T-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1,iT-T+1} & \cdots & \phi_{1,iT} \end{bmatrix} ; i = 1,\ldots,k$$

فرمولهای مربوط به V و B_i به روش مشابه برحسب ضرایب $\theta_{i,j}$ بـه دست می‌آینـد. بـرای بـه دسـت آوردن فـرم اسـتاندارد یـک مـدل اتورگرسیو- میانگین متحرک چند متغیره قرار می‌دهیم

$$W_n = U^{-1}V\eta_n, \Phi_i = U^{-1}A_i, \Theta_i = U^{-1}B_iV^{-1}U$$

بنابراین رابطهٔ (۵) به

$$Y_n = \Phi_1 Y_{n-1} + \ldots + \Phi_k Y_{n-k} + W_n - \Theta_1 W_{n-1} + \ldots - \Theta_l W_{n-l} \qquad (6)$$

تبدیل خواهد شد. حال مطالعهٔ فرایند همبستهٔ متناوب $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ که در رابطهٔ (٤) صدق می‌کند، معادل مطالعهٔ فرایند اتورگرسیو- میانگین متحرک $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ طبق رابطهٔ (٦) می‌باشد.

مراجع

[1] Boshnakov, G.N., 1995, *Recursive Computation of the Parameters of Periodic Autoregressive Moving_ Average Processes,* Journal of Time Series Analysis, Vol.1, No.4, pp. 333-349.

[2] Gladyshev, E.G., 1961, *Periodically Correlated Random Sequences,* Soviet Math.Dok1.2, pp. 385-388.

[3] Hurd, H.L., 1960, *An Investigation Periodically Correlated Stochastic Processes,* Ph.D. Disseration, Duke University Durham, North Carolina.

[4] Miamee, A.G., 1990, *Periodically Correlated Processes and Their Stationary Dilations*, SIAM J. Appl.Math., Vol.50, pp.1194-1199.

[4] *Boshnakov*