توابع مفصل[1] و اندازه‌های ارتباط[2]

فائزه شفیعی فر[3] محمد حسین علامت ساز[4]

چکیده

هنگامی که چند واحد (سیستم) دریک محیط مشترک قرار دارند، اغلب تحت تاثیر عوامل محیطی، یا ساختار سیستم، دارای وابستگی می‌باشند. این پدیده، در اکثر موارد عملی و برای اکثر داده‌های واقعی رخ می‌دهد. برای تجزیه و تحلیل داده‌های واقعی، در مرحلهٔ اول، ساختار وابستگی متغیرها بررسی می‌شود. برای این منظور، اندازه‌های وابستگی گوناگونی معرفی شده‌اند. امروزه، توابع مفصل به عنوان راهی برای مطالعهٔ اندازه‌های آزاد از مقیاس و وابستگی پیشنهاد می‌شوند، زیرا ویژگیهای ناپارامتری بودن، ناوردایی و وابستگی توابع متغیرهای تصادفی را به خوبی بیان می کنند. در مقاله حاضر چگونگی کاربرد توابع مفصل برای به دست آوردن انواع ارتباط، وابستگی، ضرایب همبستگی ناپارامتری و اندازه وابستگی دنباله‌ای تشریح می‌شود.

کلمات کلیدی: تابع مفصل، ضریب همبستگی ناپارامتری ، ضریب وابستگی دنباله‌ای.

۱. مقدمه

مفاهیم اولیه وابستگی مثبت و منفی، توسط لهمن [7] بیان شده است. مفاهیمی که توسط وی ارائه شد، همگی در حالت دو متغیره مطرح شده بودند. ازاری و پروشان و والکپ [٤]، ابراهیمی و گوش [۲] و در سالهای اخیر تیلور، بزرگنیا و امینی [۱] مفاهیم وابستگی را تعمیم و در حالت چند متغیره مورد بررسی قرار دادند.

اندازه‌های ارتباط که از اوایل قرن بیستم معرفی و شناخته شدند، برای اندازه‌گیری شدت وابستگی بدون در نظر گرفتن نوع آن به کار می‌روند.

توابع مفصل در سال ۱۹۵۹ توسط اسکلار معرفی شدند. تابع مفصل تابعی است که یک تابع توزیع چند متغیره را به تابع توزیعهای حاشیه‌ای تک متغیره آن پیوند می‌دهد. طبیعتاً یکی از کاربردهای توابع مفصل ساختن توزیعهای توأم، با استفاده از توزیعهای حاشیه‌ای است، ولی

---

[1] *Copula Function*

[2] *Measures of Association*

[3] دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه اصفهان

[4] گروه آمار، دانشگاه اصفهان

امروزه توابع مفصل به عنوان ابزاری برای مطالعهٔ اندازه‌های آزاد از مقیاس و وابستگی استفاده می‌شوند. زیرا آنها ویژگیهای ناپارامتری بودن، نارودایی و وابستگی توابع توزیع متغیرهای تصادفی را به خوبی بیان می‌کنند.

در مقاله حاضر، چگونگی استفاده از توابع مفصل در مورد اندازه‌های ارتباط معروفی چون τ ی کندال، ρ ی اسپیرمن و γ ی جینی و مفاهیم وابستگی مربعی، رگرسیونی، نسبت درستنمایی و وابستگی در دنباله را تشریح خواهیم کرد.

۲. تابع مفصل

یک تابع مفصل دو بعدی تابعی مانند $C: I^2 \to I = [0,1]$ با ویژگیهای زیر می باشد:

الف) $\forall t \in [0,1];$

$$C(0,t) = C(t,0) = 0, \quad C(1,t) = C(t,1) = t$$

ب) $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I; \quad u_1 \le u_2, \quad v_1 \le v_2$

$$C(u_1,v_1) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_2,v_2) \ge 0 \quad (1)$$

تابع مفصل C نسبت به هریک از متغیرهای خود، غیر نزولی و پیوسته است.

قضیهٔ معروف اسکلار بیان می‌دارد که اگر H یک تابع توزیع دوبعدی با تابع توزیعهای حاشیه‌ای F و G باشد، در نتیجه یک تابع مفصل C وجود دارد به طوری که $H(x,y)=C(F(x),G(y))$. برعکس، برای هر تابع توزیع تک متغیرهٔ F و G و هر مفصل C، تابع H مذکور یک تابع دوبعدی با توزیعهای حاشیه‌ای F و G تعریف می‌کند. همچنین اگر G,F پیوسته باشند، C یکتاست.

بنابراین

$$u,v \in I = [0,1]; \quad (2)$$

$$C(u,v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$$

کرانهای تابع مفصل توسط فرشه مشخص شد:

$$\begin{cases} W(u,v) = \max\{u+v-1, 0\} \\ M(u,v) = \min\{u,v\} \\ W(u,v) \le C(u,v) \le M(u,v) \end{cases} \quad (3)$$

مثال ۱ـ برای $\delta > 0$ تابع توزیع توأم زیر را در نظر بگیرید:

$$(4) \quad -\infty < x, y < \infty$$

$$H(x,y) = \exp\{-[e^{-x} + e^{-y} - (e^{\delta x} + e^{\delta y})^{-1/\delta}]\}$$

بدیهی است وقتی $x \to \infty$ و $y \to \infty$ به ترتیب توابع حاشیه‌ای تک متغیره به دست می آیند:

$$F(x) = \exp\{-e^{-x}\} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$G(y) = \exp\{-e^{-y}\} \qquad -\infty < y < \infty$$

پس با در نظر گرفت $u=F(x)$ و $v=G(y)$ خواهیم داشت:

$$x = -Ln(-Ln(u)) \quad \text{و} \quad y = -Ln(-Ln(v))$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطهٔ ٤ و با استفاده از رابطهٔ ۲، تابع مفصل به دست می آید: [٦]

$$0 < u, v < 1$$

$$C(u,v) = uv \exp\{[-Lnu)^{-\delta} + (-Lnv)^{-\delta}]^{-1/\delta}\}$$

۳. اندازه های ارتباط

با استفاده از توابع مفصل، محاسبهٔ اندازه‌های ارتباط بسیار آسان است.

τ ی کندال:

دو مشاهدهٔ مستقل (X_1,Y_1) و (X_2,Y_2) از بردار تصادفی (X,Y) را در نظر بگیرید. تابع

$$(5) \quad \tau = P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}$$

به عنوان تفاوت احتمالهای هماهنگی و ناهماهنگی میان دو مشاهدهٔ (X_1,Y_1) و (X_2,Y_2) از بردار تصادفی پیوسته (X,Y) با تابع توزیع توأم H و توابع حاشیه‌ای مشترک F (برای X_1 و X_2) و G (برای Y_1 و Y_2) تعریف می‌شود.

قضیهٔ ۱ـ فرض کنید C تابع مفصل باشد. آنگاه:

$$(6) \quad \tau = 4\iint_{I^2} C(u,v)\,dC(u,v) - 1$$

اثبات:

می‌توان نشان داد که این تابع تنها از طریق مفصل به توزیع (X_1,Y_1) و (X_2,Y_2) وابسته است. فرض کنید

$$H(x,y) = C(F(x),G(y)).$$

باشرطی کردن روی مقادیر (X_1,Y_1) داریم:

$$\tau = \iint_{R^2} \{P[X_2 < x, Y_2 < y] + P[X_2 > x, Y_2 > y] - P[X_2 < x, Y_2 > y] - P[X_2 > x, Y_2 < y]\} dH$$

$$= \iint_{R^2} \{H(x,y) + [1 - F(x) - G(y) + H(x,y)] - [F(x) - H(x,y)] - [G(y) - H(x,y)]\} dH$$

$$= \iint_{R^2} \{C(u,v) + [1 - u - v + C(u,v)] - [u - C(u,v)] - [v - C(u,v)]\} dC$$

که در آن $u=F(x)$ و $v=G(y)$. آنگاه:

$$\tau = 4\iint_{I^2} C(u,v)dC - 2\iint_{I^2} (u+v)dC + 1$$

$$= 4\iint_{I^2} C(u,v)dC - 2E(U+V) + 1$$

از آنجائی که U و V دارای توزیع یکنواخت بر روی بازهٔ $[0,1]$ هستند،

داریم: $$E(U) = E(V) = \frac{1}{2}$$

در نتیجه: $$\tau = 4\iint_{I^2} C(u,v)dC - 1$$

و

$$\iint_{I^2} C_1(u,v)dC_2(u,v) = \frac{1}{2} - \iint_{I^2} \frac{\partial}{\partial u}C_1(u,v)\frac{\partial}{\partial v}C_2(u,v)dudv \tag{7}$$

لذا رابطهٔ (٦) را می‌توان به صورت زیر نوشت: [۹]

$$\tau = 1 - 4\iint_{I^2} \frac{\partial}{\partial u}C(u,v)\frac{\partial}{\partial v}C(u,v)dudv \tag{8}$$

مثال ۲ـ فرض کنید $C_{\alpha,\beta}(0 \le \alpha,\beta \le 1)$، مفصل بقا برای خانوادهٔ مارشال-الکین[5] [۱۰]، ازتوزیع نمایی دومتغیره، یعنی $C_{\alpha,\beta}(u,v) = \min(u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta})$ است که یک مؤلفهٔ منفرد بر منحنی $u^\alpha = v^\beta$ وقتی $\alpha\beta > 0$ دارد. بنابراین با استفاده از رابطهٔ (۸) داریم:

$$\tau = 1 - 4\iint_{I^2, u^\alpha < v^\beta} (1-\beta)v^{1-2\beta}u\,dudv - 4\iint_{I^2, u^\alpha > v^\beta} (1-\alpha)vu^{1-2\alpha}dudv$$

$$= 1 - \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha - \alpha\beta + \beta} - 1 + \frac{\alpha}{\beta - \alpha\beta + \alpha}$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha\beta + \alpha}$$

ρ ی اسپیرمن

سه مشاهدهٔ مستقل (X_1,Y_1)، (X_2,Y_2) و (X_3,Y_3) از بردار (X,Y) را در نظر بگیرید. آنگاه کمیت

$$\rho_s = 3[p\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0\}] \tag{9}$$

به ρ ی اسپیرمن مشهوراست.

قضیهٔ ۲ـ متغیر تصادفی (X,Y) با تابع توزیع توأم H و توزیعهای حاشیه‌ای $F(x)$ و $G(y)$ و تابع مفصل C را در نظر بگیرید. آنگاه:

$$\rho_S = 12\iint_{I^2} uv\,dC - 3 \tag{10}$$

اثبات:

سه مشاهدهٔ مستقل (X_1,Y_1)، (X_2,Y_2) و (X_3,Y_3) از بردار (X,Y) را در نظر بگیرید. P را احتمال این که (X_1,Y_1) و (X_2,Y_3) هماهنگ باشند فرض می‌کنیم، یعنی:

$$P = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] \tag{11}$$

$$= P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_3] + P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_3]$$

---

[5] Marshall-Olkin

پس با شرطی کردن بر توزیع (X_1,Y_1) و در نظر گرفتن استقلال X_2 و Y_2 داریم:

$$P=\iint_{R^2}\{P[X<x]P[Y<y]+P[X>x]p[Y>y]\}dH$$

$$=\iint_{R^2}\{F(x)G(y)+(1-F(x))(1-G(y))\}dH$$

$$=\iint_{I^2}\{uv+(1-u)(1-v)\}dC$$

با توجه به اینکه U و V دارای توزیع یکنواخت بر بازهٔ [۰,۱] هستند،

$$=2\iint_{I^2}uvdC$$

پس با توجه به رابطه (۹) داریم:

$$\rho_s=6p-3$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\rho_s=12\iint_{I^2}uvdC-3$$

فرم دیگر ρ_S را می‌توان از رابطهٔ ۱۱ و شرطی کردن روی توزیع (X_2,Y_3) به دست آورد. در این حالت داریم:

$$P=\iint_{R^2}\{p[X>x,Y>y]+p[X<x,Y<y]\}dFdG$$

$$=\iint_{I^2}\{[1-F(x)-G(y)+H(x,y)]H(x,y)\}dudv$$

با توجه به اینکه U و V دارای توزیع یکنواخت بر بازهٔ [۰,۱] هستند:

$$=2\iint_{I^2}C(u,v)dudv$$

در نتیجه

$$\rho_s=12\iint_{I^2}C(u,v)dudv-3 \qquad (12)$$

با توجه به توزیع U و V فرم دیگری را نیز می‌توان از رابطهٔ ۱۱ برای ρ_s به صورت زیر به دست آورد: [۹]

$$\rho_s=12\iint_{I^2}[C(u,v)-uv]dudv \qquad (13)$$

مثال ۳ـ تابع مفصل فرشه را در نظر بگیرید:

$$C(u,v)=\alpha M(u,v)+(1-\alpha-\beta)uv+\beta W(u,v)$$

رابطهٔ ۱۱ را برای این مفصل به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned}\rho_s=12\{&\iint_{I^2,u<v,u+v-1<0}[\alpha u+(1-\alpha-\beta)uv]dudv+\\&\iint_{I^2,u<v,u+v-1>0}[\alpha u+(1-\alpha-\beta)uv+\beta(u+v-1)]dudv+\\&\iint_{I^2,u>v,u+v-1<0}[\alpha v+(1-\alpha-\beta)uv]dudv+\\&\iint_{I^2,u>v,u+v-1>0}[\alpha u+(1-\alpha-\beta)uv+\beta(u+v-1)]dudv\}-3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_s=12\{&[\tfrac{1}{24}\alpha+\tfrac{1}{48}(1-\alpha-\beta)]+[\tfrac{1}{48}\alpha-\tfrac{1}{48}\beta+\tfrac{5}{48}]\\&+[\tfrac{1}{48}\alpha-\tfrac{1}{48}\beta+\tfrac{1}{48}]+[\tfrac{1}{48}\alpha-\tfrac{1}{48}\beta+\tfrac{5}{48}]\}-3\end{aligned}$$

بنابراین:

$$.\rho_s=\alpha-\beta$$

γی جینی:

کمیت زیر یکی دیگر از معیارهای اندازه‌گیری ارتباط است که به γی جینی معروف است:

$$\gamma=2E(|F(X)+G(Y)-1|-|F(X)-G(Y)|) \qquad (14)$$

قضیهٔ ۳ـ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با مفصل C باشند. آنگاه اندازه ارتباط جینی برای X و Y عبارت است از:

$$\gamma=4[\iint_{I^2}M(u,v)dC+\iint_{I^2}W(u,v)dC]-2 \qquad (15)$$

اثبات:

فرض کنید $F(x)=u$ و $G(y)=v$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\gamma&=2E(|U+V-1|-|U-V|)\\&=2\iint_{I^2}[|u+v-1|-|u-v|]dC(u,v)\end{aligned}$$

حال، چون

$$M(u,v)=\min(u,v)=\frac{1}{2}[u+v-|u-v|]$$

بنابراین داریم:

$$4\iint_{I^2} M(u,v)dC(u,v)=$$

$$2\iint_{I^2}[u+v-|u-v|]dC(u,v)=A$$

چون تابع مفصل یک تابع توزیع دو متغیره با توزیع حاشیه‌ای تک متغیرهٔ یکنواخت بر بازهٔ (۰،۱) می‌باشد، داریم:

$$\iint_{I^2} u\,dC(u,v)=\iint_{I^2} v\,dC(u,v)=\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$.\ A=2-2\iint_{I^2}|u-v|\,dC(u,v)$$

همچنین چون

$$W(u+v)=\frac{1}{2}[u,v-1+|u+v-1|]$$

به طور مشابه داریم:

$$4\iint_{I^2} W(u,v)dC(u,v)=2\iint_{I^2}[u+v-1]dC(u,v)$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}\gamma&=2E(|U+V-1|-|U-V|)\\&=4[\iint_{I^2} M(u,v)dC+\iint_{I^2} W(u,v)dC]-2\end{aligned}$$

٤. مفاهیم وابستگی

وابستگی مربعی[۶]

فرض کنید (X,Y) یک زوج متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع توأم H و توابع توزیع حاشیه‌ای F و G باشد. زوج (X,Y) را وابستهٔ مربعی مثبت گویند هر گاه:

$$H(x,y)-F(x)G(y)\geq 0$$

و زوج (X,Y) را وابستهٔ مربعی منفی گویند هر گاه:

$$H(x,y)-F(x)G(y)\leq 0$$

بنابراین اندازه مقطعی وابستگی مربعی در هرنقطهٔ $(x,y)\in R$ برابر $W(x,y)=H(x,y)-F(x)G(y)$ است. با استفاده از ویژگیهای توابع مفصل می‌توان یک اندازه، برای وابستگی مربعی مورد انتظار به دست آورد. این اندازه عبارت است از:

$$\begin{aligned}E(w)&=E(W(x,y)) \qquad (16)\\&=\iint_{R^2}[H(x,y)-F(x)G(y)]dH(x,y)\\&=\iint_{I^2}[C(u,v)-uv]dC(u,v)\end{aligned}$$

ودر نتیجه

$$.E(W)=\frac{1}{12}(3\tau-\rho_s)$$

وابستگی رگرسیونی[۷]

زوج متغیر تصادفی (X,Y) را وابستهٔ رگرسیونی مثبت گویند هر گاه $P[Y\leq y\mid X=x]$ به ازای تمام yها برحسب x نزولی باشد و وابستهٔ رگرسیونی منفی گویند هر گاه احتمال شرطی فوق بر حسب x صعودی باشد. با استفاده از توابع مفصل بررسی وابستگی رگرسیونی بسیار ساده‌تر می‌شود.

قضیهٔ ٤ـ زوج متغیر تصادفی (X,Y) وابستهٔ رگرسیونی مثبت است اگر و تنها اگر $\frac{\partial}{\partial u}C(u,v)$ به ازای تمام v ها برحسب u نزولی باشد وابستهٔ رگرسیونی مثبت است اگر و تنها اگر $\frac{\partial}{\partial u}C(u,v)$ برحسب u صعودی باشد.

اثبات:

$$P[Y\leq y\mid X=x]=\frac{\frac{\partial}{\partial x}H(x,y)}{\frac{d}{dx}F(X)}$$

---

[۶] Quadrant Dependence

[۷] Regression Dependence

$$= \frac{\dfrac{\partial}{\partial u} C(u,v) \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial u} C(u,v)$$

و حکم ثابت می‌شود [۹].

وابستگی نسبت درستنمایی[8]

زوج متغیر تصافی (X,Y) با تابع چگالی پیوستهٔ h ، وابستهٔ نسبت درستنمایی مثبت است اگر و تنها اگر

$$\forall x_1 < x_2 , y_1 < y_2 ;$$

$$h(x_2 , y_2)h(x_1 , y_1) - h(x_1 , y_2)h(x_2 , y_1) \ge 0$$

و اگر نامساوی فوق برعکس باشد زوج متغیر تصادفی (X,Y) وابستهٔ نسبت درستنمایی منفی می‌باشند [۶ و۷] . تعریف می کنیم:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y_2}\int_{-\infty}^{x_2} [h(x_2 , y_2)h(x_1 , y_1) - h(x_1 , y_2)h(x_2 , y_1)]dx_1dy_1dx_2dy_2 \qquad (17)$$

با استفاده از ویژگیهای تابع مفصل و $u=F(x)$ و $v=G(y)$ داریم:

$$T = \int_0^1\int_0^1\int_0^{v_2}\int_0^{u_2} [c(u_2 , v_2)c(u_1 , v_1) - c(u_1 , v_2)c(u_2 , v_1)]du_1dv_1du_2dv_2$$

که در آن $c(u,v)$ چگالی مفصل، یعنی

$$c(u,v) = (\partial^2 / \partial u \partial v)C(u,v)$$

می‌باشد. بنابراین:

$$h(x,y)= c(F(x),G(y))f(x)g(y)$$

که f و g توابع چگالی X و Y هستند.

برای ارزیابی T، ابتدا فرض می کنیم $T(u_2 , v_2)$ بیانگر انتگرال دوگانهٔ درونی باشد. لذا به سادگی داریم:

$$T(u_2 , v_2) = C(u_2 , v_2)\frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial v_2}C(u_2 - v_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}C(u_2 , v_2)\frac{\partial}{\partial v^2}C(u_2 , v_2) \qquad (18)$$

[8] Likelihood Ratio Dependence

حال با جایگذاری u و v به ترتیب به جای u_2 و v_2 داریم:

$$T = \int_0^1\int_0^1 C(u,v)\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}C(u,v)dudv - \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u}C(u,v)\frac{\partial}{\partial v}C(u,v)dudv \qquad (19)$$

با توجه به روابط ۵ و ۷ به سادگی مشاهده می‌شود که انتگرال اول برابر $\frac{1}{4}(\tau + 1)$ و انتگرال دوم برابر $\frac{1}{4}(1-\tau)$ می‌باشد. بنابراین $T = \frac{1}{2}\tau$. در نتیجه اگر تابع توزیع (x,y) مطلقاً پیوسته باشد، عبارت $\frac{1}{2}\tau$ مشخص‌کنندهٔ یک اندازهٔ متوسط از وابستگی نسبت درستنمایی است [۸].

وابستگی در دنباله[9]

متغیر تصادفی Y را صعودی در دنبالهٔ راست[10] برحسب متغیر تصادفی X گویند، هر گاه $p[Y \le y \mid X > x]$ به ازای تمام مقادیر y، برحسب x صعودی باشد. اگر $Y|X$ صعودی در دنبالهٔ راست باشد، از نماد $RTI\ (Y|X)$ استفاده می‌شود.

متغیر تصادفی Y را نزولی در دنبالهٔ چپ[11] برحسب متغیر تصادفی X گویند اگر و تنها اگر $p[Y \le y \mid X \le x]$ به ازای تمام مقادیر y، برحسب x نزولی باشد. اگر $Y|X$ نزولی در دنبالهٔ چپ باشد، آن را با $LTD\ (Y|X)$ نشان می دهند [۴ و۵] .

قضیهٔ ۵ـ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با تابع توزیع توأم $H(x,y)$ و به ترتیب با توابع حاشیه‌ای $F(X)$ و $G(Y)$ باشند و تابع مفصل برابر C باشد. آنگاه:

الف) $LTD(Y|X)$ اگر و تنها اگر $C(u,v)/u$ به ازای تمام v ها برحسب u نزولی باشد.

ب) $RTI\ (Y|X)$ اگر و تنها اگر $1-u-v+C(u,v)/1-u$ به ازای تمام v ها برحسب u صعودی باشد، یا $v-C(u,v)/1-u$ به ازای تمام v ها بر حسب u نزولی باشد.

[9] Likelihood ratio dependence

[10] Right Tail Increasing

[11] Left Tail Decreasing

اثبات:

فرض کنید C یک تابع مفصل برای متغیرهای تصادفی X و Y باشد، و $F(x)=u$ و $G(y)=v$. آنگاه:

$$p[Y \le y \mid X \le x] = \frac{P[Y \le y, X \le x]}{P[X \le x]} = \frac{C(u,v)}{u} \qquad (۲۰)$$

پس حکم (الف) برقرار است. از طرف دیگر

$$p[Y > y \mid X > x] = \frac{P[Y > y, X > x]}{P[X > x]} = \frac{۱-P[Y \le y \text{ or } X \le x]}{۱-P[X \le x]} = \frac{۱-u-v+C(u,v)}{۱-u} \qquad (۲۱)$$

$$P[Y \le y \mid X > x] = ۱-P[Y > y \mid X > x] = \frac{v-C(u,v)}{۱-u} \qquad (۲۲)$$

بنابراین قسمت (ب) نیز برقرار است.

با توجه به این قضیه، نتیجهٔ زیر بدیهی می‌باشد.

نتیجه ـ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته با مفصل C باشند، آنگاه:

الف) $LTD\ (Y|X)$ اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \le \frac{C(u,v)}{u}$$

ب) $RTI(Y|X)$ اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \ge \frac{v-C(u,v)}{۱-u}$$

۵. ضریب وابستگی در دنباله[۱۲]

وابستگی در دنباله مفهومی است که از مطالعهٔ وابستگی بین مقادیر انتهایی ناشی می‌شود. این نوع وابستگیها را به خوبی توسط تابع مفصل می‌توان نشان داد. ضریب وابستگی در دنباله، اندازهٔ وابستگی در دنباله را نشان می‌دهد. ضریب وابستگی در دنبالهٔ بالایی برای متغیرهای تصادفی (X,Y) عبارت است از:

$$\lambda_U = \lim_{u \to ۱} P[Y > G^{-۱}(u) \mid X > F^{-۱}(u)] \qquad (۲۳)$$

با این شرط که حد فاصلهٔ $[۰,۱]$ وجود داشته باشد که در آن:

$$F^{-۱}(u) = \inf\{x \in R \mid F(x) > u\}; \forall u \in (۰,۱)$$

اگر $\lambda_U \in (۰,۱]$، X و Y را به طور مجانبی وابسته در دنبالهٔ بالایی گویند. اگر $\lambda_U = ۰$، X و Y را به طور مجانبی مستقل در دنبالهٔ بالایی گویند.

ضریب وابستگی در دنبالهٔ پایینی عبارت است از:

$$\lambda_L = \lim_{u \to ۰} P[Y \le G^{-۱}(u) \mid X \le F^{-۱}(u)] \qquad (۲۴)$$

اگر $\lambda_L \in (۰,۱]$، X و Y را به طور مجانبی وابسته در دنبالهٔ پایینی گویند. اگر $\lambda_L = ۰$، X و Y را به طور مجانبی مستقل در دنبالهٔ پایینی گویند.

قضیهٔ ۶ـ فرض کنید C تابع مفصل X و Y باشد، آنگاه:

$$\lambda_U = \lim_{u \to ۱} (۱-۲u+C(u,u))/(۱-u) \qquad (۲۵)$$

$$\lambda_L = \lim_{u \to ۰} C(u,u)/u \qquad (۲۶)$$

اثبات:

معادل با تعریف (۲۳) می‌توان نوشت:

$$P[Y > G^{-۱}(u) \mid X > F^{-۱}(u)] = \frac{P[Y > G^{-۱}(u), X > F^{-۱}(u)]}{P[X > F^{-۱}(u)]} =$$

$$\frac{۱-p[X \le F^{-۱}(u)]-p[Y \le G^{-۱}(u)]}{۱-p[X \le F^{-۱}(u)]} + \frac{p[X \le F^{-۱}(u), Y \le G^{-۱}(u)]}{۱-p[X \le F^{-۱}(u)]}$$

همچنین

[۱۲] Coefficinet of Tail Dependence

$$P[Y \le G^{-1}(u) \mid X \le F^{-1}(u))] =$$

$$\frac{P[Y \le G^{-1}(u), X \le F^{-1}(u)]}{P[X \le F^{-1}(u)]}$$

و حکم ثابت می‌شود[۳].

مثال ٤ـ مفصل دو متغیرهٔ گامبل به صورت زیر است:

$$\theta \ge 1; \quad (۲۷)$$

$$C_\theta(u,v) = \exp(-[(-Lnu)^\theta + (-Lnv)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}$$

آنگاه

$$\frac{1-2u+C(u,u)}{1-u} = \frac{1-2u+\exp(2^{\frac{1}{\theta}} Lnu)}{1-u}$$

$$= \frac{1-2u+u^{2^{\frac{1}{\theta}}}}{1-u}.$$

در نتیجه

$$\lambda_U = \lim_{u\to 1} \frac{1-2u+C(u,u)}{1-u}$$

$$= 2 - \lim_{u \to 1} 2^{\frac{1}{\theta}} u^{2^{\frac{1}{\theta}}-1} = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$$

بنابراین برای $\theta > 1$ ، C_θ وابستگی در دنبالهٔ بالایی دارد و برای $\theta = 1$ به طور مجانبی مستقل در دنبالهٔ بالایی می‌باشد.

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0} C(u,u)/u = 0; 1 \le \theta < \infty$$

C_θ به طور مجانبی مستقل در دنبالهٔ پایینی می‌باشد.

مراجع:

[۱] امینی دهک، محمد، ۱۳۷۳ ، تحلیل پیوندهای منفی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد.

[2] Ebrahimi, N. and Ghosh, M., 1981, *Multivariate Negative Dependence,* Commun.Stat. Theory Methods, 4, 307-337.

[3] Emberechts, P., Lindskog, F. and Mcneil, A., 2001, *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management,* Risklab.ETHZ, Zurich, WWW.math.ethz.ch/finance, will appear in : Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance.

[4] Esary, J.D., Proschan, F. and Walkup, D.W., 1967, *Association of Random Variables with Applications,* Ann.Math.Statist., 38, 1466- 1474.

[5] Esary, J.D and Proschan, F., 1972, *Relationships among Some Concepts of Bivariate Dependence,* Ann.Math.Statist., 43, 651- 655.

[6] Joe, H., 1997, *Multivariate Models and Dependence Concepts,* Chapman & Hall, London.

[7] Lehman , E.L., 1966, *Some Concept of Dependence,* Ann.Math.Statist, 37, 1137- 1153.

[8] Nelsen. R.B., 1992, *On Measures of Association as Measures of Positive Dependence,* Statistics & Probability Letters 14, 269- 274.

[9] Nelsen, R.B., 1999, *An Introduction to Copuals,* Springer, New York.

[10] Nelsen, R.B., 2001, *Concordance and Copulas: A Survey Distributions with Given Marginals and Statistical Modeling,* (C.Cuadras, J.Fortiana, J.A.Rodriguez Lallena, Eds), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, in press.