

بررسی اعداد گنگ با استفاده از سریهای زمانی

محمود خراتی کوپایی^۱

چکیده

با توجه به این که اعداد گنگ دارای تعداد رقمهای اعشار نامتناهی و بدون نظم خاصی هستند، می‌خواهیم با استفاده از الگوهای سری زمانی به بررسی این گونه اعداد بپردازیم. بدین ترتیب که رقم اعشاری t - ام، به عنوان t - امین مشاهده در زمان t - ام مورد مطالعه قرار می‌گیرد. سرانجام نتیجه گیری می‌کنیم که رقمهای اعشاری اعداد گنگ باید یک سری زمانی نویز سفید باشد.

۱. مقدمه

اعداد گنگ به علت گویا نبودن، از جنبه های مختلف چه از لحاظ تاریخیچه پیدایش و چه از لحاظ یک عامل مهم در گسترش مجموعه اعداد گویا به مجموعه اعداد حقیقی، مورد توجه بوده‌اند. اثبات ریاضی گنگ بودن بعضی از اعداد مثل $\sqrt{2}$ یا $\sqrt{3}$ را می‌توان در کتابهای کلاسیک یافت؛ ولی برای عددی مثل π تنها با محاسبه تعداد زیادی از رقمهای اعشاری، می‌توان به این امر پی برد. در این مقاله با استفاده از تحلیل سریهای زمانی و نرم افزار ITSM به بررسی گنگ بودن اعداد π و e می‌پردازیم.

دو تعبیر از اعداد گنگ وجود دارد یکی این است که نتوان آنها را به صورت یک کسر نوشت و دیگر این که رقمهای اعشاری آنها دارای الگو و روند خاصی نباشند. به عنوان مثال عدد $1/1286323232 \dots$ گنگ نیست، چون یک تناوب خاص در رقمهای اعشاری آن مشاهده می‌شود و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$1/1286323232 \dots = 1 + 0/1286 + 32 \times (10^{-6} + 10^{-8} + \dots) = \frac{1117346}{990000}$$

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، بخش آمار، دانشگاه شیراز

از طرف دیگر در تجزیه و تحلیل سریهای زمانی گاهی اوقات با پدیده‌هایی سروکار داریم که ماهیت آنها تصادفی است و می‌توان آنها را مدل بندی کرد. گاهی نیز از ماهیت و واقعیت اصلی پدیده‌ها آگاه نیستیم. در این حالت برای بررسی این گونه پدیده‌ها می‌توان آنها را تصادفی فرض کرد. در ادامه خواهیم دید که این موضوع چگونه می‌تواند در آزمون فرض گنگ بودن یک عدد ما را یاری کند.

۲. بررسی گنگ بودن اعداد با استفاده از سریهای زمانی

عدد π را در نظر بگیرید. با این فرض که هر رقم اعشار این عدد، نتیجه یک آزمایش تصادفی، در زمانهای فرضی متوالی باشد، می‌توان رقمهای اعشار این عدد، یعنی $1, 4, 1, 5, 9, 2, \dots$ را به صورت یک سری داده در طی زمان (سری زمانی) فرض کرد و برای تجزیه و تحلیل آنها، از ابزار توانمند سریهای زمانی سود برد. در این راستا اگر شکل این سری زمانی دارای روند یا یک تناوب خاص باشد، می‌توان نتیجه گرفت که عدد مورد نظر گنگ نیست.

سوال: چرا نمودارهای ACF و PACF برای اعداد بیان شده شبیه به یکدیگر هستند؟ آیا این الگو برای همه اعداد گنگ صادق است؟

برای پاسخ به این سوال باید نحوه دست آوردن PACF را مورد مطالعه قرار داد. تابع خود همبستگی جزئی سری $\{X_t\}$ را با $\alpha(\cdot)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(0) = 1, \quad \alpha(h) = \phi_{hh}, \quad h \geq 1$$

که ϕ_{hh} آخرین مولفه بردار ϕ_h است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\phi_h = \Gamma_h^{-1} \lambda(h), \quad \phi_h = (\phi_{h1} \quad \phi_{h2} \quad \dots \quad \phi_{hh})'$$

$$\gamma(h) = (\gamma_x(1) \quad \dots \quad \gamma_x(h))'$$

$$\Gamma_h = [\gamma_x(i-j)]_{i,j=1}^h$$

که $\gamma_x(\cdot)$ تابع خود کواریانس سری $\{X_t\}$ است $((\gamma_x(h) = \text{cov}(X_{t+h}, X_t))$

$\alpha(h)$ را می‌توان از رابطه زیر نیز به دست آورد:

$$\phi_{hh} = \alpha(h) = \begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(h-2) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(h-2) & \rho(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \dots & \rho(1) & \rho(h) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(h-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(h-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \rho(h-2) & \dots & 1 \end{vmatrix}^{-1}$$

$$\rho(h) = \frac{\gamma_x(h)}{\gamma_x(0)}$$

تابع خود همبستگی می‌باشد. واضح است که $\rho(0) = \alpha(0)$ و $\rho(1) = \alpha(1)$

برای پاسخ به سوال بالا، باید در تأخیرهای متفاوت، شرط لازم و کافی برای تساوی $\rho(h) = \alpha(h)$ را به دست آورد. اگر $h=2$ باشد، خواهیم داشت:

$$\alpha(2) = \rho(2) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix}^{-1} \rho(2)}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix}^{-1}}$$

توجه کنید که چون ما از ماهیت اصلی عدد π بی اطلاع هستیم، فرض می‌کنیم رقمهای اعشاری آن به طور تصادفی تولید می‌شوند. چون مدل بندگی ما دارای خطا می‌باشد، در صورت مشاهده روند یا تناوب خاص، بهتر است بگوییم عدد ما با "احتمال زیاد" گویا است. مثلاً چون از ماهیت اصلی عدد $1/12863232 \dots$ یعنی کسر مولد آن، بی اطلاع هستیم، برآورد دوره تناوب آن بدون خطا انجام می‌شود و گویا بودن آن آشکارست (به عبارتی دیگر با احتمال یک گویاست).

در شکل (۱) نمودار سری زمانی و در شکل (۲) نمودار تابع خود همبستگی نمونه^۱، ACF، و نمودار تابع خود همبستگی جزئی نمونه^۲، PACF، تا تأخیر ۴۰، برای عدد π تا ۶۰۰ رقم اعشار، رسم شده است. واضح است که روند و تناوب خاصی را نمی‌توان از این شکل نتیجه گرفت. ۹۵ درصد از مقادیر ACF در داخل باند

$$\pm \frac{1/96}{\sqrt{n}} \approx \pm 0.08$$

قرار دارند (n تعداد رقمهای اعشار). پس می‌توان گفت سری رقمهای اعشار عدد π ، یک سری نویز سفید^۳ است.

ولی موضوع مورد توجه این است که نمودارهای ACF و PACF این اعداد تقریباً برابرند (مثلاً در تأخیرهای ۲۱ و ۲۲) و این نتیجه جالبی است. برای بررسی بیشتر، نمودارهای ACF و PACF عدد e با ۲۰۰ رقم و ۵۰۰ رقم اعشار را به ترتیب در شکل‌های (۲-الف) و (۲-ب) رسم می‌کنیم. در شکل (۲-الف) تا حدودی نمودارهای ACF و PACF شبیه هستند. اگر تعداد رقمهای اعشار را زیادتر کنیم (مثلاً ۵۰۰ رقم اعشار)، نمودارهای ACF و PACF الگوی یکسان‌تری ارائه می‌دهند. در این حالت نیز روند و تناوب خاصی مشاهده نمی‌شود.

تا کنون به این نتیجه رسیده‌ایم که می‌توان فرض کرد عدد e یا π با "احتمال زیاد" گنگ هستند ولی این موضوع که نمودارهای ACF و PACF برای آنها شبیه به هم هستند، نیاز به بررسی بیشتر دارد. برای حصول اطمینان بیشتر از این موضوع، نمودارهای ACF و PACF ۲۰۰ رقم اعشار عدد $\sqrt{2}$ تا تأخیر ۴۰ را در شکل (۳) رسم می‌کنیم. در این نیز نمودارهای ACF و PACF الگوی یکسانی دارند.

^۱ Sample Auto Covariance Functon

^۲ Sample Partial Auto Covariance Functon

^۳ White Noise

۳. خلاصه

در قسمت (۲) به این نتیجه رسیدیم که اعداد e و π با احتمال زیاد، گنگ هستند. زیرا اولاً با توجه به الگوی یکسان آنها در نمودارهای ACF و PACF و ثانياً با توجه به اینکه ۹۵ درصد ACF مربوط به رقمهای اعشار این اعداد بین باند $\pm 1/96/\sqrt{n}$ قرار دارند (n تعداد رقمهای اعشار)، نویز سفید بودن α آشکار است. از طرفی سری نویز سفید دارای ویژگی‌هایی است که با گنگ بودن یک عدد، یعنی بدون روند و الگوی خاصی بودن، کاملاً سازگار است. اگر عددی گنگ باشد باید سری رقمهای اعشاری آن یک سری نویز سفید باشد و این امر کاملاً منطقی به نظر می‌رسد، زیرا در این صورت رقمهای اعشاری آن کاملاً تصادفی هستند و نمی‌توان یک الگوی خاص را برای آنها در نظر گرفت. باید به این نکته توجه کرد که ممکن است یک سری ایستا باشد (بدون روند و تناوبی خاص) اما یک سری نویز سفید نباشد، مثلاً $AR(1)$. در این حالت نیز سری ایستا دارای یک الگوی خاص است و پیش بینی آنها از روشی خاص تبعیت می‌کند و این با گنگ بودن عدد متناقض است.

تشکر و قدردانی

در پایان جا دارد از جناب آقای دکتر علیرضا نعمت الهی^۵ به خاطر حمایتها و پیشنهادهای ارزشمندشان تشکر و قدردانی کنم.

در این صورت نتیجه می‌گیریم $\rho(1) = 0$ و $\rho(2) \neq 1$. در حالت $h = 3$ داریم:

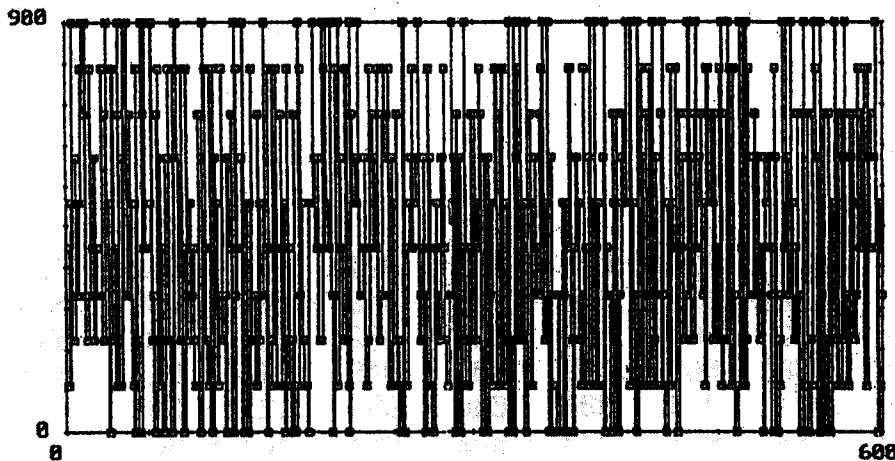
$$\alpha(3) = \rho(3) = \begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(2) \\ \hline 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}$$

در نتیجه $\rho(2) = 0$ یا $\rho(3) = 0$.

با توجه به فرم دترمینان در صورت کسر $\alpha(h)$ ، مشاهده می‌شود زمانی صورت کسر، برابر $\rho(h)$ می‌شود که

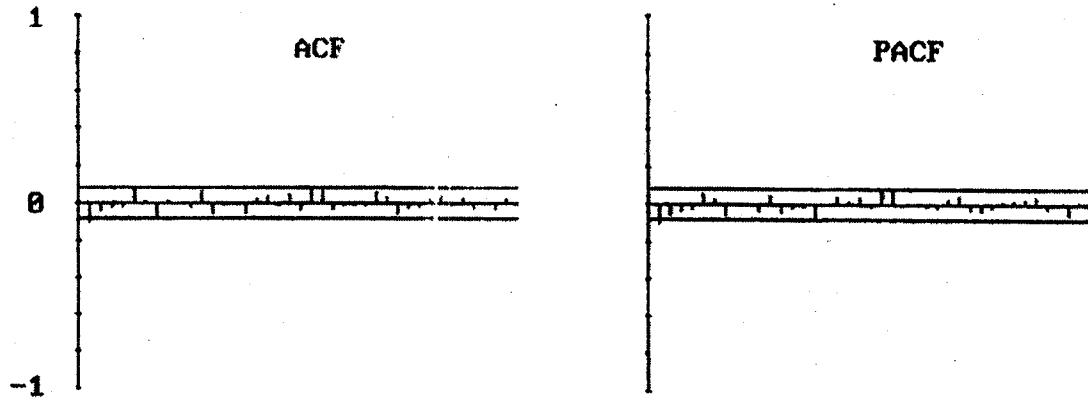
$$\rho(1) = \rho(2) = \rho(3) = \dots = \rho(h-1) = 0$$

و در این حالت مخرج کسر $\alpha(h)$ برابر ۱ است. پس نتیجه مورد نظر یعنی تساوی $\alpha(h) = \rho(h)$ ، برای $h = 1, 2, 3, \dots$ حاصل می‌شود و بنابراین سری نویز سفید است. برای روشن تر شدن موضوع، ۵۰۰ عدد تصادفی از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک را تولید کرده و شکل داده‌ها و هیستوگرام آن را در شکل (۴-الف) و نمودارهای ACF و PACF آن را در شکل (۴-ب) رسم می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که الگوی ACF و PACF شبیه به یکدیگرند. از طرفی نمونه تولید شده، یک سری مستقل و هموزیع است که ناهمبسته بودن از آن نتیجه می‌شود.



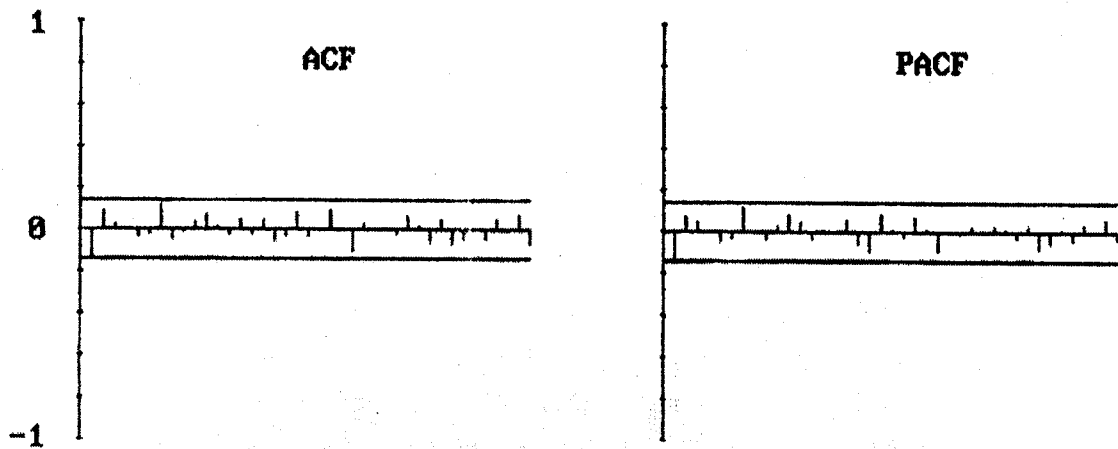
شکل ۱

^۵ بخش آمار، دانشگاه شیراز



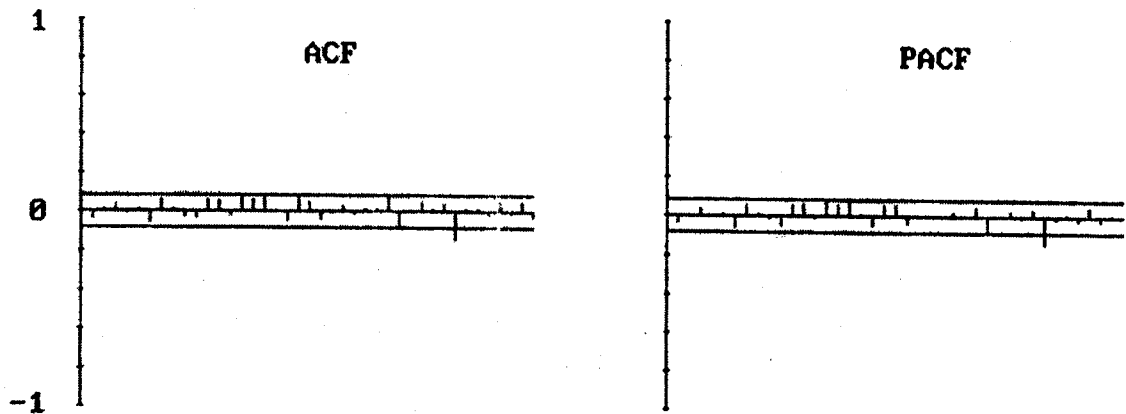
ACF:	-.104	-.048	-.022	-.018	.069	.008	-.067	.009	.003	-.025
	.056	-.064	-.013	.000	-.064	.025	.035	-.008	.042	-.031
	.080	.080	-.038	-.007	-.015	-.018	.054	.036	-.062	-.025
	-.025	.024	.030	-.007	.019	-.037	-.002	-.034	.025	-.010
PACF:	-.104	-.059	-.034	-.028	.062	.019	-.059	-.001	.000	-.032
	.047	-.048	-.021	-.012	-.066	.002	.035	.007	.040	-.015
	.084	.084	-.006	-.001	-.014	-.022	.028	.051	-.036	-.039
	-.021	.007	.023	.020	.034	-.025	-.002	-.061	.007	-.011

شکل ۲



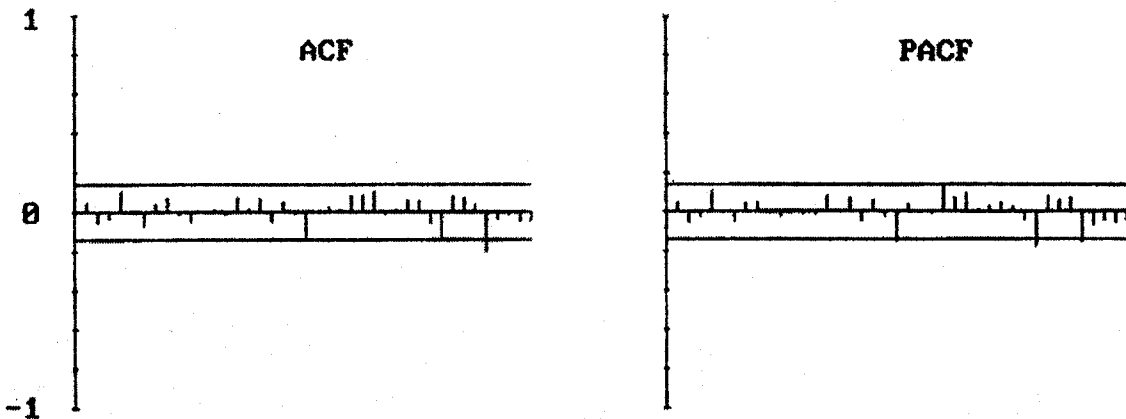
ACF:	-.138	.089	.026	.001	-.041	-.021	.118	-.042	-.013	.041
	.067	.016	-.022	.044	-.023	.048	-.064	-.039	.083	-.037
	.004	.092	.004	-.103	.026	-.002	.001	-.027	.057	.012
	-.059	.050	-.069	-.045	-.006	-.045	.042	-.017	.071	-.072
PACF:	-.138	.071	.049	.005	-.048	-.035	.121	-.003	-.040	.027
	.086	.044	-.033	.008	-.002	.061	-.061	-.089	.084	.016
	-.024	.075	.013	-.097	.003	-.010	.020	-.005	.026	.014
	-.033	.024	-.080	-.062	.007	-.042	.040	-.001	.064	-.033

شکل (۲-الف) (۲۰۰ رقم اعشار)



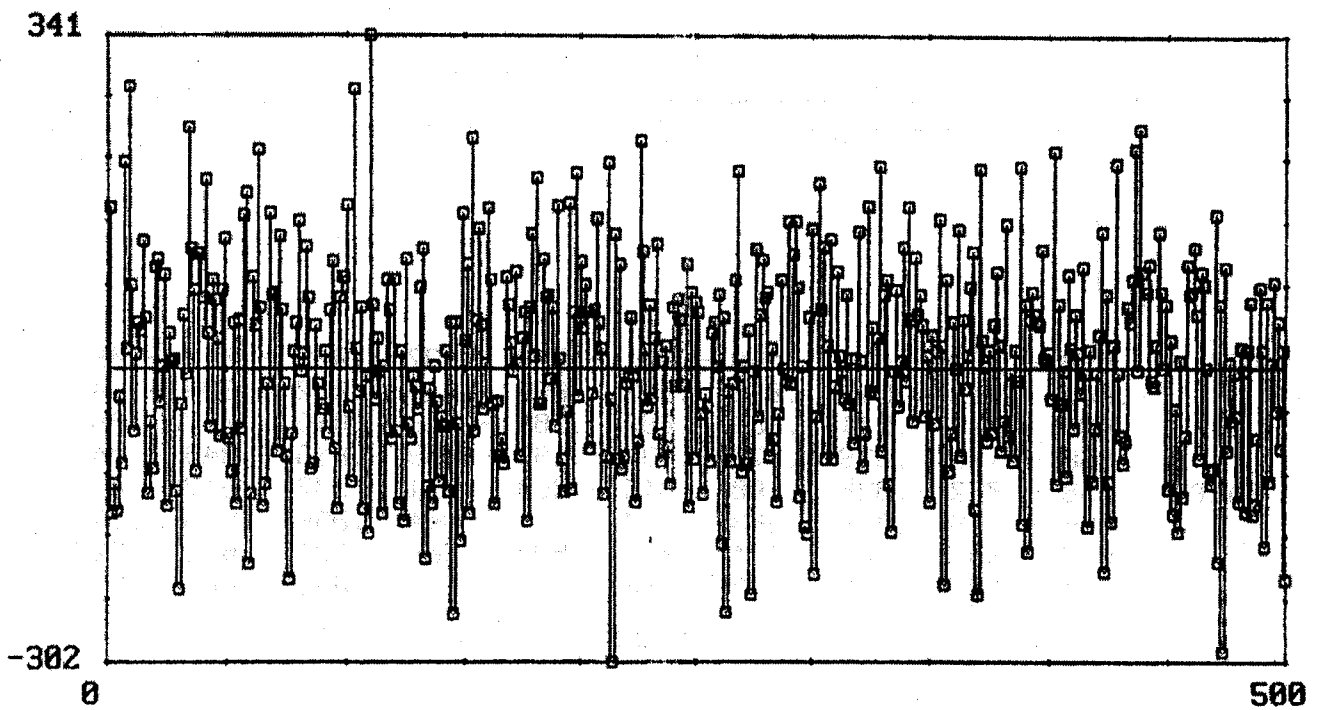
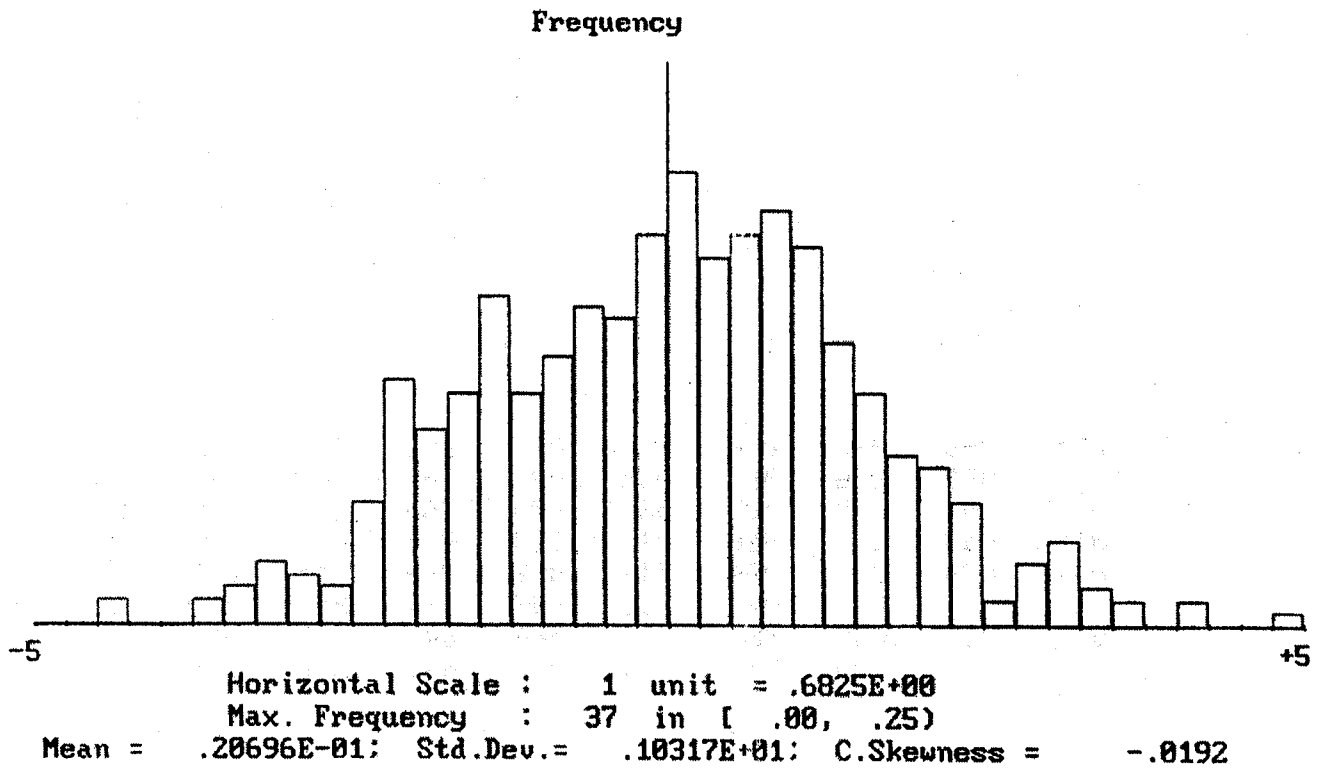
ACF:	-.031	.006	.038	-.006	.015	-.056	.061	.007	-.021	-.037
	.059	.059	-.026	.003	.054	.001	.005	-.043	.000	.042
	-.038	.004	.019	-.007	.009	.000	.066	-.067	-.001	.041
PACF:	.011	.040	-.136	.016	.016	-.029	.050	-.012	.042	-.029
	-.031	.005	.039	-.004	.014	-.057	.058	.011	-.017	-.044
	.059	.061	-.015	.074	.054	.005	.014	-.047	.060	.060
	-.031	-.005	.005	-.003	.021	-.004	.044	-.078	.002	.021
	-.007	.038	-.139	-.017	.014	-.022	.051	-.020	.018	-.004

شکل (۲-ب) (۵۰۰ رقم اعشار)

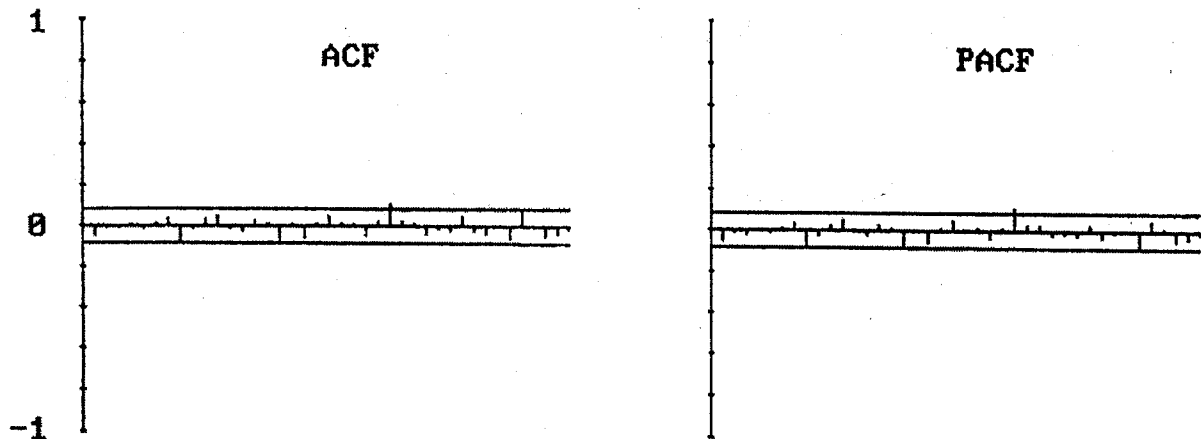


ACF:	.050	-.060	-.031	.100	-.001	-.074	.037	.068	-.012	-.051
	-.002	.010	-.015	.066	.012	.067	-.048	.052	-.009	-.144
	.003	.022	.011	.083	.002	.104	-.013	.015	.057	.059
PACF:	-.058	-.146	.079	.073	.037	-.199	-.039	-.016	-.049	-.041
	.050	-.062	-.025	.100	-.015	-.064	.051	.047	-.017	-.028
	-.004	-.010	-.009	.083	-.004	.067	-.044	.056	-.019	-.150
	.030	-.006	-.009	.131	.075	.090	.006	.027	.042	.022
	-.051	-.172	.082	.060	.066	-.150	-.065	-.051	-.062	-.048

شکل ۳



شکل (۴- الف)



-.046	-.008	-.017	.006	-.007	.017	.034	-.079	-.014	.030
.052	-.009	-.026	.026	.008	-.069	.009	-.061	.013	.044
.008	.007	-.044	.022	.106	.027	.016	-.031	-.010	-.026
.043	-.027	-.030	-.003	-.063	.067	.005	-.050	-.031	-.008
-.046	-.010	-.018	.005	-.007	.017	.035	-.076	-.020	.028
.052	-.004	-.028	.027	.016	-.074	-.003	-.061	.016	.047
.000	.012	-.034	.012	.109	.027	.028	-.018	-.008	-.022
.022	-.034	-.016	-.006	-.067	.049	.010	-.047	-.033	-.014

شکل (۴-ب)

مراجع

- [1] Brockwell, P.J. and Davis, R.A., 1996, *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer-Verlag.
 [2] Brockwell, P.J., Davis, R. A. and Mandarino, J.V., *ITSM; Interactive Time Series Modeling Package*, ver 4.

آمار هنر جان بخشیدن به داده‌هاست.