برآورد بیز خطی و بیز تجربی برای آماره‌های خطی

محمد بهرامی [1]

چکیده

در این مقاله می‌خواهیم برآورد بیز تجربی برای پارامتر θ و تابع چگالی $f(x \mid \theta)$ را بدست آوریم امّا فرض می‌کنیم این برآورد به صورت آماره‌ای خطی از X مانند $T(X) = A + BX$ بوده و سپس ضرایب این ترکیب خطی یعنی A و B را برآورد می‌کنیم. لازم به ذکر است که پارامتر θ خود یک متغیر تصادفی است که دارای تابع چگالی پیشین π می‌باشد.

۱ مقدمه

فرض کنید (Θ, X) یک بردار تصادفی باشد بطوریکه:

الف) Θ دارای تابع توزیعی مانند G باشد.

ب) به شرط Θ، X دارای تابع چگالیِ احتمال بصورت $f(x \mid \theta)$ نسبت به اندازه $\sigma-$ متناهی m باشد.

هدف برآورد Θ بوسیلهٔ تابعی مانند $T(X)$ می‌باشد. برای این منظور باید میانگین مجذور خطا یعنی: $E(T(X) - \Theta)^۲$ نسبت به آمارهٔ $T(X)$ می‌نیمم شود. اما ممکن است میانگین مربع خطا را نسبت به آماره‌های خاصی می‌نیمم کنیم مثلاً: فرض کنید $T(X)$ متعلق به کلاس توابع خطی به فهم کلی $T(X) = A + BX$ که در آن A و B دو عدد حقیقی هستند باشد. در این صورت برآورد بیزی که از این طریق بدست می‌آید برآورد بیز خطی و در صورت نامعلوم بودن G، برآورد بیز تجربی خطی نامیده می‌شود.

۲ برآورد بیز خطی

فرض کنید $f(x \mid \theta)$ به نحویست که $E(X \mid \Theta = \theta) = \theta$ برای همهٔ θها. بنابراین می‌خواهیم $E(T(X) - \Theta)^۲$ را نسبت به آماره‌های خطی می‌نیمم کنیم. برای این منظور A و B را طوری تعیین می‌کنیم که $E(A + BX - \Theta)^۲$ می‌نیمم شود می‌توان ثابت کرد $\hat{A} = E(\Theta) - \frac{Cov(X,\Theta)}{Var(X)}.E(X)$ و $\hat{B} = E(\Theta) - \frac{Cov(X,\Theta)}{Var(X)}$ جملهٔ فوق را می‌نیمم می‌کند.

اثبات:

این کار بوسیلهٔ مشتق‌گیری و یا سریعاً به طریق زیر با استفاده از

---

[1] محمد بهرامی،گروه آمار،دانشگاه اصفهان

فرمولهای واریانس بدست می‌آید

$$\begin{aligned} E(A+BX-\Theta)^2 &= Var(A+BX-\Theta) \\ &\quad +(E(A+BX-\Theta))^2 \\ &= B^2Var(X)+Var(\Theta) \\ &\quad -2BCov(X,\Theta) \\ &\quad +(A+BE(X)-E(\Theta))^2 \\ &= Var(\Theta)-\frac{Cov^2(X,\Theta)}{Var(X)} \\ &\quad +Var(X).[B-\frac{Cov(X,\Theta)}{Var(X)}]^2 \\ &\quad +[A+BE(X)-E(\Theta)]^2 \end{aligned}$$

عبارت فوق وقتی می‌نیمم می‌شود که دو جملهٔ آخر آن صفر شوند یعنی

$$\hat{B} = \frac{Cov(X,\Theta)}{Var(X)} \qquad (۱)$$

$$\hat{A} = E(\Theta)-\frac{Cov(X,\Theta)}{Var(X)}.E(X) \qquad (۲)$$

بنابراین آمارهٔ خطی $T(X)$ که میانگین مجذور خطا را می‌نیمم می‌کند با فرض اینکه توزیع پیشین Θ، G باشد بصورت زیر خواهد بود

$$T_G(X) = E(\Theta)+\frac{Cov(X,\Theta)}{Var(X)}(X-E(X)) \qquad (۳)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود اگر $G(\Theta)$ معلوم نباشد برآوردگر $T_G(X)$ را نمی‌توان بدست آورد و بنابراین با استفاده از مقادیر مشاهده شده متغیر تصادفی X باید $E(\Theta)$ و $Cov(X,\Theta)$ و $E(X)$ و $Var(X)$ را برآورد کنیم. بدین منظور نمونهٔ تصادفی $(\Theta_1,X_1),(\Theta_2,X_2)$ و ... و (Θ_n,X_n) را در نظر می‌گیریم، بطوریکه برای $i=1,2,\ldots,n$ ، Θ_i دارای تابع توزیع G و X_i دارای چگالی شرطی $f(x_i \mid \theta_i)$ باشد. واضح است که X_iها مستقل و دارای تابع چگالی کناری مشترک زیر می‌باشند

$$f_x(x) = \int f(x \mid \theta)dG(\theta) \qquad (۴)$$

قضیه:

فرض کنید چگالی شرطی $f(X \mid \theta)$ دارای خواص زیر باشد:

الف) برای همه θها $E(X \mid \Theta=\theta)=\theta$.

ب) برای همه θها $Var(X \mid \Theta=\theta)=a+b\theta+c\theta^2$.

بطوریکه $c \neq -1$ و b و a ضرایب معلوم هستند. آنگاه برآورد بیز تجربی برای θ با توزیع پیشین G، بصورت زیر خواهد بود:

$$T_G(X) = E(X)+\frac{Var(\Theta)}{Var(X)}[X-E(X)] \qquad (۵)$$

و در (۵)

$$Var(\Theta) = \frac{Var(X)-[a+bE(X)+cE^2(X)]}{c+1}$$

اثبات:

می‌دانیم که $E(X \mid \Theta)=\Theta$ بنابراین

$$E\{E(X \mid \Theta)\} = E(\Theta)$$

و در نتیجه: $E(X)=E(\Theta)$. همچنین:

$$\begin{aligned} Cov(X,\Theta) &= E(X\Theta)-E(X)E(\Theta) \\ &= E\{E(X\Theta \mid \Theta)\}-E(E(X \mid \Theta)).E(\Theta) \\ &= Cov(E(X \mid \Theta),\Theta) \\ &= Cov(\Theta,\Theta) \\ &= Var(\Theta) \end{aligned}$$

بنابراین

$$T_G(X) = E(X)+\frac{Var(\Theta)}{Var(X)}[X-E(X)]$$

اکنون $Var(\Theta)$ را بدست می‌آوریم. با استفاده از شرط (ب) قضیه و اینکه

$$\begin{aligned} Var(X)-Var(\Theta) &= E(X^2)-E^2(X) \\ &\quad -E(\Theta)^2+E^2(\Theta) \\ &= E(X^2)-E(\Theta)^2 \\ &= E\{E(X^2 \mid \Theta)-\Theta^2\} \\ &= E\{E(X^2 \mid \Theta)-E^2(X \mid \Theta)\} \\ &= E\{Var(X \mid \Theta)\} \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(\Theta) + E\{Var(X \mid \Theta)\} \\ &\quad + E\{Var(X \mid \Theta)\} \\ &= Var(\Theta) + E\{a + b\Theta + c\Theta^{2}\} \\ &= Var(\Theta) + a + bE(\Theta) + cE(\Theta)^{2} \\ &= a + bE(\Theta) + cE^{2}(\Theta) + (c+1)Var(\Theta) \end{aligned}$$

و چون $E(X) = E(\Theta)$ بنابراین

$$Var(X) = a + bE(X) + cE^{2}(X) + (c+1)Var(\Theta)$$

و یا

$$Var(\Theta) = \frac{Var(X) - [a + bE(X) + cE^{2}(X)]}{c+1} \ , \ c \neq -1$$

اکنون با استفاده از مقادیر مشاهده شدهٔ $X_1, X_2, \ldots, X_n$، برآوردهای معمولی $E(X)$ و $Var(X)$ را بدست می‌آوریم. پس

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ و } Var(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^{2}$$

و سرانجام

$$T_G^{*}(X) = \bar{X} + [1 - \frac{cS^{2} + a + b\bar{X} + c\bar{X}^{2}}{(c+1)S^{2}}](X_i - \bar{X})$$

چنانچه در نمونهٔ تصادفی $(\Theta_1, X_1), (\Theta_2, X_2), \ldots, (\Theta_n, X_n)$ برآورد بیز تجربی خطی را برای θ_i بخواهیم، در این صورت

$$T_G^{*}(X_i) = \bar{X} + [1 - \frac{cS^{2} + a + b\bar{X} + c\bar{X}^{2}}{(c+1)S^{2}}](X_i - \bar{X}) \quad (6)$$

مثال:

فرض کنید: $X_i \sim N(\theta_i, \sigma^{2})$ برای $i = 1, 2, \ldots, P$ و σ^{2} معلوم باشد. پس برای $i = 1, 2, \ldots, P$ داریم $E(X_i \mid \theta_i) = \theta_i$ و $Var(X_i \mid \theta_i) = \sigma^{2}$. طبق قضیه، $b = c = 0$ و $a = \sigma^{2}$ و برآورد بیز تجربی خطی برای θ_i عبارتست از

$$\begin{aligned} T_G^{*}(X_i) &= \bar{X} + [1 - \frac{\sigma^{2}}{S^{2}}](X_i - \bar{X}) \\ &= \bar{X} + [1 - \frac{(P-1)\sigma^{2}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^{2}}](X_i - \bar{X}) \end{aligned}$$

و یا:

$$\begin{aligned} T_G^{*}(X_i) &= [\frac{(P-1)\sigma^{2}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^{2}}].\bar{X} \\ &\quad + [1 - \frac{(P-1)\sigma^{2}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^{2}}].X_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, p \quad (7) \end{aligned}$$

در همین مثال فرض کنید برای Θ چگالی پیشین نرمال در نظر گرفته شود یعنی $\Theta_i \sim N(\mu, \tau^{2})$ برای $i = 1, 2, \ldots, P$. آنگاه برآورد بیز برای Θ_i در حالت کلّی بصورت زیر خواهد بود

$$T^{B}(X_i) = (\frac{\sigma^{2}}{\sigma^{2} + \tau^{2}})\mu + (\frac{\tau^{2}}{\sigma^{2} + \tau^{2}})X_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, P \quad (8)$$

اثبات:

با استفاده از فرمول $\pi(\theta_i \mid X_i) \propto f(X_i \mid \theta_i).\pi(\theta_i)$

و از اینکه $f(X_i \mid \theta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{2}}}.e^{-\frac{1}{2\sigma^{2}}(X_i - \sigma_i)^{2}}$

و از اینکه $\pi(\theta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^{2}}}.e^{-\frac{1}{2\tau^{2}}(\theta_i - \mu)^{2}}$

خواهیم داشت

$$\pi(\sigma_i \mid X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^{2}}}.e^{-\frac{1}{2\sigma_1^{2}}(\theta_i - \mu_1)^{2}}$$

بطوریکه $\mu_1 = (\frac{\sigma^{2}}{\sigma^{2}+\tau^{2}})\mu + (\frac{\tau^{2}}{\sigma^{2}+\tau^{2}})X_i$ و $\sigma_1^{2} = \frac{\sigma^{2}\tau^{2}}{\sigma^{2}+\tau^{2}}$ و در نتیجه

$$T^{B}(X_i) = (\frac{\sigma^{2}}{\sigma^{2} + \tau^{2}})\mu + (\frac{\tau^{2}}{\sigma^{2} + \tau^{2}})X_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, P$$

اکنون با جایگزین کردن برآوردهای نااریب μ و $\frac{\sigma^{2}}{\sigma^{2}+\tau^{2}}$ در (۸) برآورد بیز تجربی برای θ_i بصورت

$$\begin{aligned} T^{E}(X_i) &= [\frac{(P-3)\sigma^{2}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^{2}}]\bar{X} \\ &\quad + [1 - \frac{(P-3)\sigma^{2}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^{2}}]X_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, P \quad (9) \end{aligned}$$

بدست خواهد آمد.

با مقایسه برآوردگر بیز تجربی و برآورد بیز خطی تجربی یعنی (۷) و (۹) مشاهده می‌شود که برای برآورد پارامتر θ در برآورد بیز تجربی باید حداقل از یک نمونه ۴تایی استفاده

شود در صورتیکه در برآوردگر بیز خطی تجربی یک نمونه حداقل ۲تایی می‌تواند همان اطلاعات را در مورد پارامتر θ در اختیار قرار دهد. بنابراین از این نظر برآوردگر بیز خطی تجربی می‌تواند از برآوردگر بیز تجربی بهتر باشد.

البته می‌توان حالتی را نیز در نظر گرفت که $T(X)$ برحسب X خطی نباشد، اما این خود می‌تواند به عنوان مقاله‌ای دیگر مطرح شده و بنابراین از موضوع این مقاله خارج است.

مراجع

[1] Herbert Robbins (1983), *The Annals of Statistics.* Vol. 11. No. 3.

[2] George Cassela (1985), *The American Statistical Association*, May 1985. Vol. 39. No. 2.